dr Šefket Arslanagić, redovni profesor
Prirodno–matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu

# O jednoj logaritamskoj nejednakosti i njenoj primjeni

UDK 517.3

## Sažetak

U ovom radu ćemo dati jednu logaritamsku nejednakost i ukazati, kroz više primjera, na njenu značajnu primjenu u izračunavanju približnih vrijednosti nekih određenih integrala, čiji se neodređeni integrali ne mogu odrediti elementarnim putem (riječ je o eliptičkim integralima). Takvi integrali su, na primjer, $\int e^{x^2}dx, \int e^{-x^2}dx, \int \sin x^2 dx, \int \frac{\sin x}{x}dx$, i drugi.

**Ključne riječi**: logaritamska nejednakost, određeni integral, približna vrijednost određenog integrala, Bernulijeva nejednakost.

## Logaritamska nejednakost i njen dokaz

Riječ je o sljedećoj nejednakosti:

$$\ln(t+1) \le t; \; t > -1 . \tag{1}$$

**Dokaz**: Nejednakost (1) je ekvivalentna nejednakosti:

$$e^t \ge t+1; \; t > -1 . \tag{2}$$

Formirajmo funkciju:

$$f(t) = e^t - t - 1; \; t > -1 .$$

Imamo:

$$f'(t)=e^t-1,$$

pa je $f'(t)=0$ za $t=0$, a $f'(t)<0$ za $-1<t<0$, te $f'(t)>0$ za $t>0$. Dakle, funkcija opada na intervalu $(-1,0)$, a raste na intervalu $(0,+\infty)$, pri čemu je $f(0)=0$. Zato je $f(t)\geq 0$ za sve $t>-1$, što je i trebalo dokazati. Jednakost u (2), odnosno u (1) važi ako, i samo ako je $t=0$.

## Primjena nejednakosti (2)

**Primjena 1**. Dokazati da vrijedi nejednakost:

$$\frac{2}{3}<\int_0^1 e^{-x^2}dx<\frac{\pi}{4}. \tag{3}$$

**Dokaz**: Stavljajući u nejednakost (2) da je $t=-x^2$, dobijamo nejednakost $e^{-x^2}>1-x^2$. (Uzeli smo da je $t\neq 0$, odnosno $x\neq 0$, pa vrijedi u (2) stroga nejednakost). Ako sada stavimo u (2) da je $t=x^2$, dobijamo nejednakost $e^{x^2}>1+x^2$ ($t\neq 0$, tj. $x\neq 0$). Iz nejednakosti $e^{x^2}>1+x^2$ slijedi da je $e^{-x^2}<\frac{1}{1+x^2}$. Dakle, imamo sada sljedeću dvojnu nejednakost:

$$1-x^2<e^{-x^2}<\frac{1}{1+x^2}.$$

Integrišući ovu nejednakost u granicama od *0* do *1,* dobijamo:

$$\int_0^1(1-x^2)dx<\int_0^1 e^{-x^2}dx<\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}, \text{ tj.}$$

$$\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1<\int_0^1 e^{-x^2}dx<arctgx\Big|_0^1,$$

a odavde:

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)<\int_0^1 e^{-x^2}dx<arctg1\,,$$

odnosno:

$$\frac{2}{3}<\int_0^1 e^{-x^2}dx<\frac{\pi}{4}\,,\ \text{q.e.d.}$$

**Napomena 1**. Budući da je $\frac{2}{3}=0{,}66666...$, a $\frac{\pi}{4}=0{,}78539...$, imamo da je sada iz (3):

$$0{,}66666...<\int_0^1 e^{-x^2}dx<0{,}78539...\,.$$

**Primjena 2**. Dokazati da vrijedi nejednakost!

$$\frac{4}{3}<\int_0^1 e^{x^2}dx<\frac{e+2}{3}\,. \tag{4}$$

**Dokaz**: Stavljajući u (2) da je $t=x^2$, dobijamo nejednakost $e^{x^2}>x^2+1$. S druge strane, na osnovu Bernulijeve nejednakosti, imamo:

$$e^{x^2}=\left[1+(e-1)\right]^{x^2}\leq 1+(e-1)x^2;\quad x\in(0,1)\,.$$

Sada imamo dvojnu nejednakost:

$$x^2+1<e^{x^2}<1+(e-1)x^2\,.$$

Integrišući ovu nejednakost u granicama od *0* do *1*, dobijamo:

$$\int_0^1 \left( x^2+1 \right) dx < \int_0^1 e^{x^2} dx < \int_0^1 \left[ 1+(e-1)x^2 \right] dx \text{, tj.}$$

$$\left( \frac{x^3}{3} + x \right) \Bigg|_0^1 < \int_0^1 e^{x^2} dx < \left[ x + (e-1) \cdot \frac{x^3}{3} \right] \Bigg|_0^1 ,$$

odnosno:

$$\frac{1}{3} + 1 < \int_0^1 e^{x^2} dx < 1 + \frac{e+1}{3} ,$$

a odavde:

$$\frac{4}{3} < \int_0^1 e^{x^2} dx < \frac{e+2}{3} \text{, q.e.d.}$$

**Napomena 2**. Uzimajući u (4) da je $\frac{4}{3} = 1{,}333...$, te $\frac{e+2}{3} = \frac{4{,}7183...}{3} = 1{,}5727...$, imamo da je:

$$1{,}333 < \int_0^1 e^{x^2} dx < 1{,}5727... .$$

**Primjena 3**. Dokazati da vrijedi nejednakost:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-tg^2 x} dx < \frac{\pi+2}{8} . \qquad (5)$$

**Dokaz**: Iz nejednakosti (2) slijedi sljedeća nejednakost:

$$e^{-t} < \frac{1}{t+1};\ (t > -1) .$$

Stavljajući sada da je $t = tg^2 x$, dobijamo:

$$e^{-tg^2 x} < \frac{1}{1+tg^2 x} = cos^2 x,$$

a odavde, integrišući ovu nejednakost u granicama od $x=0$ do $x=\frac{\pi}{4}$, imamo:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-tg^2 x} dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2 x dx,$$

a kako je:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+cos 2x) dx = \frac{1}{2}\left( \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos 2x dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left( x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right) = \frac{1}{2}\left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi+2}{8},$$

to imamo da je:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-tg^2 x} dx < \frac{\pi+2}{8}, \text{ q.e.d.}$$

**Primjena 4**. Dokazati da vrijedi nejednakost:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{sin^2 x} dx \le 1 \cdot \tag{6}$$

**Dokaz**: Iz nejednakosti (2) slijedi sljedeća nejednakost:

$$e^{-t} \geqslant 1-t; (\forall t \in \mathbb{R}),$$

a odavde:

$$e^t \leq \frac{1}{1-t}; \ \forall t \in (-\infty, 1).$$

Stavljajući sada da je $t = sin^2 x$, dobijamo:

$$e^{sin^2 x} \leq \frac{1}{1-sin^2 x} = \frac{1}{cos^2 x},$$

a odavde, integrišući ovu nejednakost od $x=0$ do $x=\frac{\pi}{4}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{sin^2 x} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cos^2 x} = \left(tgx\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = tg\frac{\pi}{4} - tg0 = 1, \text{ tj.}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin^2 x dx \leq 1, \text{ q.e.d.}$$

**Napomena 3**. Koristeći poznate nejednakosti:

$$x - \frac{x^3}{3!} < sin x < x; \ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

i:

$$1 - \frac{x^2}{2!} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}; \forall x \in \mathbb{R},$$

možemo procjenjivati vrijednosti određenih integrala:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin x}{x} dx \text{ i } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos x}{x} dx,$$

kao i:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(sin x) dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(cos x) dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(cos x) dx.$$

Dokazuje se da važe nejednakosti:

$$\int_0^x \frac{sint}{t} dt > 0; \forall x > 0, \ \frac{8}{9} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(sin x)dx < 1, \ 1{,}17 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(cos x)dx < 1{,}21$$

$$\text{i} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(cos x)dx > \frac{8}{9}.$$

## Zaključak

Može se opravdano reći da je nejednakost (1), odnosno njoj ekvivalentna nejednakost (2) veoma pogodna pri procjeni nekih važnih određenih integrala koji se ne mogu tačno izračunati elementarnim putem. Ovo se često primjenjuje u mnogim teorijskim i praktičnim problemima.

## Literatura


1. Adnađević, D, Kadelburg, Z, *Matematička analiza I*, "Nauka", Beograd, 1998.
2. Marjanović, M, *Matematička analiza I*, "Naučna knjiga", Beograd, 1979.
3. Mesihović, B, Arslanagić, Š, *Zbirka riješenih zadataka i problema iz matematike sa osnovama teorije i ispitni zadaci*, "Svjetlost", Sarajevo, 1988.
4. Pólya, G, Szegö, G, *Anfgaben und Lehrsätze aus der Analysis (4. Aufl)*, Springer, Berlin-Heidelberg, I (1970), II (1971).
5. Rudin, W, *Principles of Mathematical Analysis (2nd. ed)*, McGraw-Hill Co, New York, 1964.