

## GeoGebra kao sredstvo za razumevanje i učenje matematičkih veličina u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu

Miroslava Mihajlov Carević, Lazar Kopanja, Nebojša Denić

**SAŽETAK:** U ovom radu bavili smo se ispitivanjem efikasnosti učenja određenih matematičkih sadržaja u osnovnoj školi korišćenjem savremenih tehnologija u obrazovanju. Učenici sedmog razreda upoznati su sa prikazivanjem tačaka u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu a učenici osmog razreda sa prikazivanjem grafika linearnih funkcija. Formirali smo eksperimentalnu i kontrolnu grupu u svakom razredu. U eksperimentalnim grupama smo organizovali saradničko učenje uz kompjutersku podršku i dinamički softverski paket GeoGebra. Kontrolne grupe u oba razreda su radile u učionici pomoću table, krede i statičkih grafičkih prikaza. U cilju ostvarivanja saradničkog učenja u eksperimentalnim grupama su formirane male tročlane grupe od učenika različitog nivoa matematičkog znanja dok su u kontrolnim grupama učenici radili pojedinačno, samostalno. Po završetku upoznavanja sa predviđenom materijom organizovali smo testiranje učenika. U oba razreda rezultati eksperimentalne grupe su bili značajno bolji od rezultata u kontrolnoj grupi. Pokazano je da je postignuće učenika znatno veće kada rade u saradničkim grupama koristeći dinamički softverski paket GeoGebra. Takođe je pokazano da GeoGebra omogućava olakšano razumevanje i učenje prikazivanja tačaka i grafika linearnih funkcija u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu.

**Ključne riječi:** *Olakšano razumevanje i učenje, GeoGebra, koordinate tačaka, linearna funkcija, saradničko učenje*

## Geogebra as a Tool for Understanding and Learning of Mathematical Quantities in Cartesian Coordinate System

**ABSTRACT:** In this paper, we dealt with the examination of the effectiveness of specific learning mathematics in primary school using modern technology in education. Seventh graders were introduced to the screening points in the Cartesian Cartesian coordinate system and the eighth graders displaying graphics of linear functions. We formed the experimental and control groups in each class. In the experimental groups have organized collaborative learning with computer support and dynamic software package GeoGebra. Control groups in both classes worked in the classroom using the blackboard, chalk and static graphics. In order to achieve collaborative learning in the experimental groups were formed three-member male group of students with different levels of mathematical knowledge while in the control groups of students worked individually on their own. Upon completion of familiarization with the proposed matter, we organized the testing of students. In both classes the results of the experimental group were significantly better than the control group. It is shown that student achievement is significantly higher when working in collaborative groups using dynamic software package GeoGebra. It was also shown that GeoGebra allows easier understanding and learning points and displaying graphics of linear functions in Cartesian Cartesian coordinate system.

**Keywords:** *Facilitates understanding and learning, GeoGebra, point coordinates, linear function, collaborative learning*

### UVOD

U savremenom dobu informacionih i komunikacionih tehnologija, pred obrazovni proces se postavljaju novi zahtevi usmereni ka osposobljavanju učenika za aktivno korišćenje savremenih tehnologija. Ovaj cilj je moguće ostvariti ako se u nastavnom procesu koriste savremeni pristupi bazirani na novim tehnologijama uz adekvatne pedagoške metode (Abu Bakar, Ayub, Fauzi i Tarmizi, 2010; Manenova, Skutil i Zikl, 2010). Novo digitalno doba zahteva moderne nastavnike pripremljene da koriste savremene tehnologije i sposobne da ih primene u nastavnom procesu u cilju efikasnijeg poduča (Kim, 2002; Ruthven, 2009). Studije pokazuju da upotreba informacionih i komunikacionih tehnologija

integriranih u nastavne aktivnosti, pozitivno utiče na proces mišljenja kod učenika stimulišući kreativno razmišljanje (Allegra, Chifari i Ottaviano, 2001; Viamonte, 2010).

Integracija savremenih tehnoloških dostignuća u nastavne procese privlači sve veće interesovanje nastavnika matematike. Nove tehnologije su znatno proširile skup nastavnih sredstava u obrazovanju. U oblasti matematike, tokom poslednjih decenija, došlo je do naglog razvoja dinamičkih softverskih paketa. Značajno mesto u obrazovanju dobili su matematički paketi Cabri Geometry, Geometer's Sketchpad i GeoGebra. Ispitivanjem efikasnosti učenja matematike korišćenjem matematičkih softverskih paketa, bavili su

se mnogobrojni naučnici čije rezultate je korisno upoznati (Bozkurt i Ruthven, 2016; Doruk, Aktumen i Aytekin, 2013; Diković, 2009; Figueira-Sampaio, do Santos i Carrijo 2009; Garcia, 2013; Hohenwarter i Fuchs, 2004; Hohenwarter, Hohenwarter i Lavicza, 2009; Ruthven, Hennessy i Deaney, 2008; Saha, Ayub i Tarmizi, 2010; Takači, Stankov i Milanovic, 2015; Zengin, Furkan i Kutluca, 2012).

Problem istraživanja u ovom radu je efikasnost učenja elemenata analitičke geometrije u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu korišćenjem savremenih tehnologija u obrazovanju. Predviđeni nastavni sadržaji su obrađivani i praktikovani na računarima pomoću softverskog paketa GeoGebra. Istraživanje je vršeno u osnovnoj školi „Stevan Sremac“ u Beogradu tokom školske 2013/14. godine. Obuhvaćene su nastavne jedinice koje se obrađuju u 7. i 8. razredu. Učenici 7. razreda su se bavili prikazivanjem tačaka u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu a učenici 8. razreda prikazivanjem i čitanjem grafika linearnih funkcija. U oba razreda smo formirali eksperimentalnu i kontrolnu grupu radi upoređivanja rezultata, pri čemu su samo eksperimentalne grupe radile uz kompjutersku podršku. U eksperimentalnim grupama učenici su organizovani u manje tročlane grupe radi saradničkog učenja koje je preporučeno od stručnjaka u obrazovanju kao jedna od najnaprednijih alatki za poboljšanje podučavanja i učenja (Gomez i Passerini, 2010; Laal i Ghodsi, 2012). Postupak i opis istraživanja izloženi su u Odeljku 2. Nakon završene obrade nastavnih jedinica izvršeno je testiranje svih učenika. Dobijeni rezultati su analizirani a njihov prikaz sa analizom i poređenjem priložen je u Odeljku 3. U oba razreda rezultati eksperimentalne grupe su bili bolji od rezultata u kontrolnoj grupi.

## METODOLOGIJA ISTRAŽIVANJA

Upoznavanje učenika sa geometrijskim objektima u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu, u Srbiji se po nastavnom planu obavlja u 7. razredu osnovne škole. Predviđena su ukupno 4 časa za obradu i vežbanje predstavljanja tačaka, izračunavanja rastojanja između dve tačke i određivanja središta duži u Dekartovoj ravni. Nastavnici su ovu materiju redovno obrađivali pomoću table, krede i postera. U cilju poboljšanja efikasnosti učenja ove materije organizovali smo istraživanje koje je obuhvatilo dve grupe učenika 7. razreda, eksperimentalnu i kontrolnu, koje su primenom različitih nastavnih sredstava obrađivale predviđeno gradivo. U eksperimentalnoj grupi smo organizovali nastavu putem računara i softverskog paketa GeoGebra dok su učenici u kontrolnoj grupi radili u učionici uz pomoć nastavnika, table, krede i slikovnih prikaza. Odelenja 7<sub>2</sub> i 7<sub>4</sub> su činila eksperimentalnu grupu (50 učenika) dok su učenici 7<sub>1</sub> i 7<sub>3</sub> činili kontrolnu grupu (51 učenik). Pri formiranju eksperimentalne i kontrolne grupe rukovodili smo se principom približno iste prosečne ocene iz matematike i približno istog broja učenika u grupama. U cilju negovanja i ostvarivanja saradničkih odnosa među učenicima, u eksperimentalnoj grupi smo formirali 16 tročlanih i dve četvoročlane saradničke grupe koje su činili učenici različitog nivoa matematičkog znanja. Takve grupe su preporučene od istraživača efikasnog učenja (Chai, Lin, So i Cheah, 2011; Dooly, 2008). U saradničkom učenju svi učenici imaju svoje zaduženje i odgovornost. Učenici

koji nisu razumeli materiju postavljaju pitanja, učenici koji su razumeli im pomažu da shvate i time utvrđuju svoje znanje. Saradničkim učenjem se razvija timski rad i odgovornost u radu jer je svaki pojedinac odgovoran ne samo za sopstveno učenje već i za učenje ostalih članova u grupi. U cilju ostvarivanja dobrih saradničkih odnosa, učenicima je dozvoljeno da se samostalno grupišu, uz poštovanje principa različitog nivoa matematičkog znanja među članovima grupe, jer je dobra saradnička veza preduslov za efikasno saradničko učenje (Dogru i Kalender, 2007).

Na početku prvog časa za učenike u eksperimentalnoj grupi organizovan je kratak 15-to minutni trening rada sa GeoGebrom. Zatim su učenici upoznati sa osnovnim pojmovima u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu (Koordinatnim osama, koordinatama tačaka) i njihovim predstavljanjem pomoću GeoGebre. Do kraja časa učenici su vežbali crtanje tačaka u Dekartovoj ravni. Tačke čija je jedna koordinata 0 predstavljale su problem za učenike jer nisu sigurni gde se one nalaze. U cilju razjašnjavanja takvih dilema učenicima je zadat zadatak da nacrtaju 8 tačaka u GeoGebri i da nakon svake ucrtane tačke obrate pažnju na podatak koji se pojavio u algebarskom delu. GeoGebra kao dinamički softver odmah nakon unošenja tačke u grafičkom delu, prikazuje u algebarskom delu koordinate unete tačke što je učenicima omogućavalo interaktivno učenje. Zatim su učenici samoinicijativno ucrtavali tačke, zapisivali na papiru njihove koordinate i upoređivali sa koordinatama upisanim u algebarskom delu. Interaktivni rad koji omogućuje GeoGebra pomogao je učenicima da uoče svoje greške i da ih koriguju. Oni su imali odmah povratnu informaciju o korektnosti svakog svog zaključka o koordinatama tačaka koje su prikazane na ekranu. To je omogućilo učenicima da se vrate korak nazad, razmisle o svojim zaključcima i koriguju pogrešno shvaćeno.

Na drugom času učenici su određivali dužinu duži u Dekartovoj ravni. Na početku časa od učenika je zahtevano da nacrtaju tačke  $A_1(4,0)$  i  $B_1(8,0)$  pa da samostalno, uočavanjem razdaljine između tačaka, odrede dužinu duži  $A_1B_1$ . Postupak je ponovljen za nekoliko parova tačaka. Zatim je od učenika zahtevano da nacrtaju tačke  $A(2,1)$  i  $B(6,4)$  i odrede dužinu duži  $AB$ . Komentari učenika bili su: „kako ćemo sada ovo“, „ovo ne može da se uradi“ i tome slično. Kada im je nastavnica rekla da nacrtaju tačku  $C(6,1)$  pojedini učenici su počeli da uočavaju pravougli trougao u kome je moguće odrediti dužine duži  $AC$  i  $BC$  (na prethodno uvežban način) a zatim i dužinu duži  $AB$  primenom Pitagorine teoreme. Do kraja časa rađeni su zadaci sa određivanjem dužine duži.

Na trećem času učenici su određivali središte duži, najpre duži koje se nalaze na koordinatnim osama a zatim i proizvoljne duži u Dekartovoj ravni (Slika 1a).

Tokom izrade zadataka učenici u grupi su menjali zaduženja. Neki su crtali tačke na papiru, drugi u GeoGebri, treći su određivali ono što se zahtevalo u zadatku. Zatim su zajedno proveravali rezultat pa menjali zaduženja u narednom zadatku. Razgovori sa učenicima nakon časova su pokazali da je njima ovakav način učenja interesantan, za neke je bio i zabavan. Iskazivali su da im je očigledan pristup u upoznavanju novih pojmova olakšao razumevanje i prihvatanje tih

pojmovna i da im je veći broj urađenih primera pomogao da na času ovladaju predviđenom materijom.

Na četvrtom času izvršeno je obnavljanje i utvrđivanje pređenog gradiva, putem raznih zadataka, na prethodno opisan način.

Učenici iz kontrolne grupe su obrađivanje i vežbanje ove materije obavili pomoću table i postera pri čemu je na četvrtom času takođe izvršeno obnavljanje i utvrđivanje gradiva.

Na petom času izvršena je provera znanja putem kontrolne vežbe u obe grupe. Svi učenici su kontrolnu vežbu radili samostalno, u učionici. U prvom zadatku od učenika je traženo da pročitaju koordinate tačaka na slici. U drugom zadatku je traženo da u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu nacrtaju tačke zadate svojim koordinatama. U trećem zadatku je trebalo odrediti dužine dve duži od kojih se prva nalazila na koordinatnoj osi a druga u prvom kvadrantu Dekartove ravni. U četvrtom zadatku se zahtevalo određivanje središta duži iz prethodnog zadatka. Rezultati rada učenika su priloženi i analizirani u Odeljku 3.

Upoznavanje učenika sa linearnim funkcijama u Srbiji počinje u 8. razredu osnovne škole. Predviđeno je da tokom 11 časova (5 časova obrade i 6 časova vežbanja) učenici nauče crtanje grafika linearne funkcije, određivanje nule, preseka grafika sa y-osom, znaka, toka funkcije i čitanje njenog grafika. Na osnovu dugogodišnjeg iskustva u nastavi matematike, stekli smo utisak da je ispitivanje osobina linearne funkcije i crtanje njenog grafika jedna od najtežih oblasti za učenike, ne samo u 8. razredu osnovne škole već i u 1. razredu srednje škole kada se ova oblast ponovo obrađuje sa dodatnim zahtevima.

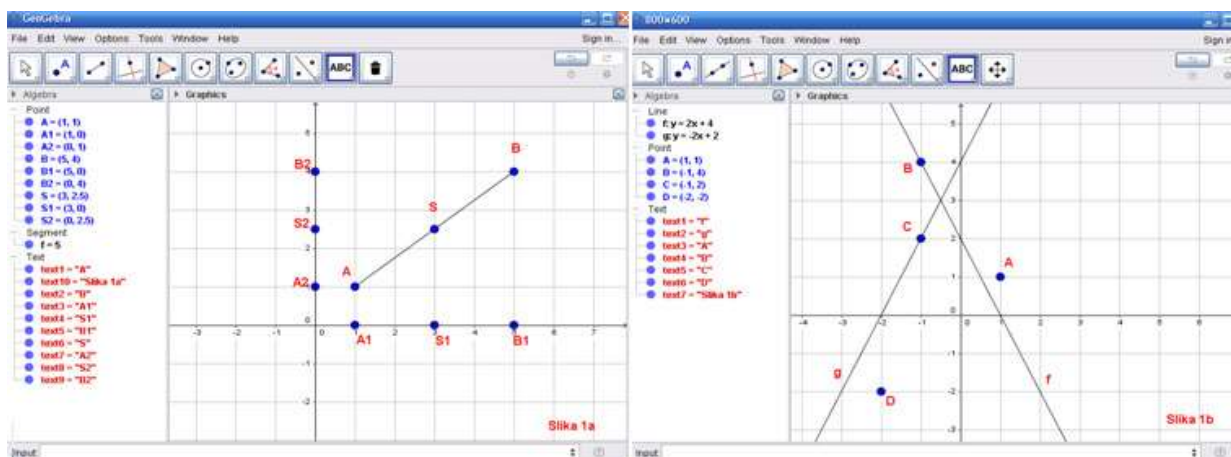
Da bi učinili učenje lakšim i efikasnijim organizovali smo istraživanje slično istraživanju obavljenom u 7. razredu i opisanom u prethodnom delu. Formirali smo eksperimentalnu i kontrolnu grupu učenika po istim principima kao u 7. razredu i sa istim načinom rada. Eksperimentalnu grupu su činili učenici 8<sub>2</sub> i 8<sub>4</sub> (50 učenika) a kontrolnu učenici 8<sub>1</sub> i 8<sub>3</sub> (49 učenika). Zbog postojanja samo jedne učionice sa računarima (kabineta za informatiku) i njene zauzetosti, nije bilo moguće organizovati sve časove za eksperimentalnu grupu u

kabinetu. Odlučeno je da eksperimentalna grupa obavi 5 časova obrade u učionici i 6 časova vežbanja u kabinetu sa računarima dok će kontrolna grupa sve časove obaviti u učionici. Po završetku obrade i vežbanja predviđen je jedan čas za proveru stečenih znanja u obe grupe.

Na početku prvog časa učenici eksperimentalne grupe su upoznati sa radom u GeoGebri a potom su dobili zadatak da samostalno, bez pomoći GeoGebre, nacrtaju grafik funkcije  $y = 2x + 4$  i odrede njen presek sa x-osom i y-osom. Nakon 10 minuta rada na papiru, datu funkciju su uneli u GeoGebru i u grafičkom delu ekrana dobili njen grafik. Zatim su proveravali tačnost svog rada. Većina grupa nije imala tačan grafik funkcije. Presek sa x-osom takođe nije bio dobro određen kod većine grupa pa je izvršeno korigovanje urađenog zadatka. Drugi zadatak, urađen sa istim zahtevima kao i prvi, za funkciju  $y = 3x - 6$  imao je više tačnih rešenja. Učenicima je prvi grafik funkcije nacrtan u GeoGebri pomogao da shvate kako je ispravno postupati.

Na drugom času nastavljen je rad sa prethodnog časa. Učenicima je savetovano da u svojoj grupi izvrše podelu posla – jedan učenik je određivao presek funkcije sa koordinatnim osama, drugi crtao grafik funkcije na papiru a treći u GeoGebri. Dve grupe su imale po 4 učenika pa je kod njih razdvojeno određivanje preseka funkcije sa koordinatnim osama. Nakon uvida u grafik funkcije u grafičkom delu GeoGebre, učenici su korigovali svoje greške ili potvrdili tačnost svojih zaključaka. Cilj je bio da učenici uče uz pomoć GeoGebre. Kako su odmah dobijali povratnu informaciju o korektnosti svog zaključka, mogli su da uče kako je ispravno raditi.

Tokom prvih 5 časova vežbanja učenici su menjali uloge u svojim grupama. Učenicima koji su imali poteškoće u radu pomagali su ostali članovi grupe. Tako su svi prošli kroz sve faze rešavanja zadatka. Nacrtali su 12 grafika funkcija, određivali nulu funkcije, presek grafika sa y-osom, tok i znak funkcije, ispitivali pripadnost date tačke grafiku funkcije, čitali sa grafika tražene podatke. Dok su učenici radili u grupama nastavnica matematike je bila pored njih, motivišući ih i odgovarajući na njihova pitanja. Primeri njihovog rada sa grafičkim funkcijama i ispitivanjem pripadnosti tačke grafiku funkcije dati su na Slici 1b.



Slika 1. Središte duži, grafici linearnih funkcija i pripadnost tačke grafiku u GeoGebri

Na 6. času vežbanja izvršeno je obnavljanje i utvrđivanje pređenog gradiva putem raznih zadataka na prethodno opisan način.

Učenici iz kontrolne grupe su obrađivanje i vežbanje ove materije obavili u učionici, radeći sa nastavnicom matematike pomoću table i krede.

Na 12. času izvršena je provera znanja svih učenika putem kontrolne vežbe, u učionici bez kompjuterske podrške. U prvom zadatku je zahtevano da se nacrtaju grafici zadate funkcije, u drugom da se odrede preseki date funkcije sa koordinatnim osama. U trećem zadatku je zahtevano da se analizira tok date linearne funkcije i ispita pripadnost date tačke njenom grafiku. U četvrtom zadatku je dat grafik funkcije i traženo je da se odredi funkcija čiji je grafik nacrtan. Pri tom su ponuđena 4 odgovora među kojima je trebalo pronaći tačan odgovor. Rezultati rada učenika su priloženi u Odeljku 3.

## REZULTATI I DISKUSIJA

U sedmom razredu, na kontrolnom zadatku, tačno urađen prvi zadatak vrednovan je sa 10 bodova. Zadato je 5 tačaka, svaki tačan odgovor donosio je 2 boda. Drugi zadatak je vrednovan sa 15 bodova, zadato je 5 tačaka, svaki tačan odgovor donosio je 3 boda. Treći zadatak je donosio 12 bodova, 2 boda za dužinu duži na koordinatnoj osi i 10 bodova za drugu datu duž. Četvrti zadatak je vrednovan sa 13 bodova, 3 za središte duži na koordinatnoj osi i 10 za središte druge date duži.

U Tabeli 1 prikazani su rezultati dobijeni na kontrolnom zadatku. Prilikom bodovanja zadataka vrednovano je sve što je u zadatku dobro urađeno. Od 50 učenika u eksperimentalnoj grupi prvi zadatak je kompletno uradilo 18 učenika, 32 učenika je postiglo od 2 do 8 bodova i nema učenika sa 0 bodova. Drugi zadatak je kompletno uradilo 11 učenika, 39 učenika je postiglo od 3 do 12 bodova i nema učenika sa 0 bodova. Treći zadatak je kompletno uradilo 15 učenika, 6 učenika je postiglo 2 boda, 29 učenika od 3 do 11 bodova i nema učenika sa 0 bodova. I u četvrtom zadatku nema učenika sa 0 bodova, 6 učenika je postiglo 3 boda, 32 učenika od 4 do 12 bodova i 12 učenika je kompletno uradilo zadatak. Od 51 učenika u kontrolnoj grupi prvi

zadatak je kompletno uradilo 15 učenika, 33 učenika je postiglo od 2 do 8 bodova i 3 učenika imaju 0 bodova. Drugi zadatak je kompletno uradilo 9 učenika, 37 učenika je postiglo od 3 do 12 bodova i 5 učenika imaju 0 bodova. Treći zadatak je kompletno uradilo 9 učenika, 8 učenika je postiglo 2 boda, 32 učenika od 3 do 11 bodova i 2 učenika imaju 0 bodova. Četvrti zadatak je kompletno uradilo 6 učenika, 8 učenika je postiglo 3 boda, 31 učenik od 3 do 11 bodova i 6 učenika imaju 0 bodova.

Prosečan broj bodova u eksperimentalnoj grupi u prvom zadatku bio je 7,04, u drugom 9,48, u trećem 7,32, u četvrtom 7,18 i u celom testu 31,02. U kontrolnoj grupi prosečan broj bodova u prvom zadatku bio je 6,35, u drugom 8,31, u trećem 6,18, u četvrtom 5,52, u celom testu 26,37. Dobijeni rezultati pokazuju da je eksperimentalna grupa bila uspešnija od kontrolne u proseku za 4,65 bodova po učeniku. Ako pogledamo grafički prikaz ovih rezultata učinak rada pomoću računara u saradničkim grupama je još očigledniji (Slika 2a.).

U osmom razredu na kontrolnom zadatku svaki zadatak je donosio maksimalno 10 bodova pri čemu je vrednovan svaki deo urađenog zadatka. Jedino u 4. zadatku gde je trebalo zaokružiti jedan od 4 ponuđena odgovora, učenici su dobijali 0 ili 10 bodova zavisno od toga da li su zaokružili netačan ili tačan odgovor. U Tabeli 2 prikazani su rezultati dobijeni na kontrolnom zadatku u 8. razredu.

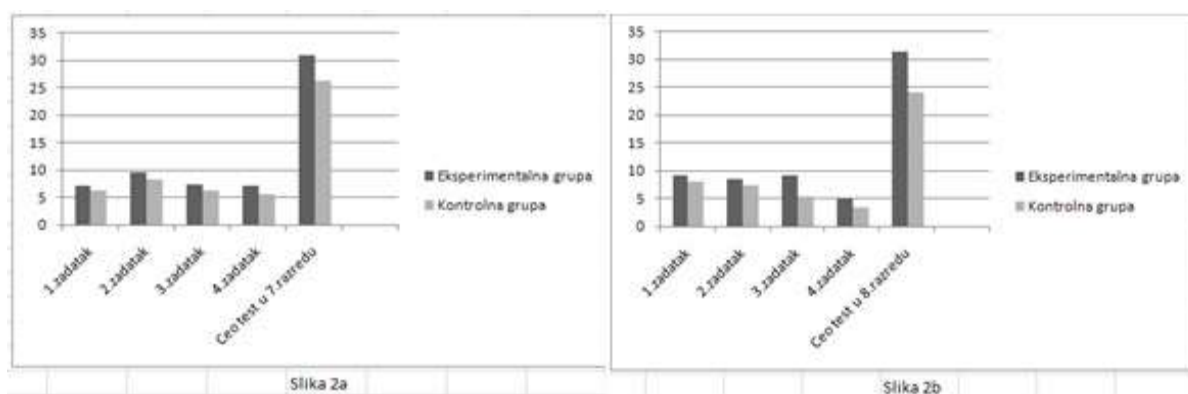
Od 50 učenika u eksperimentalnoj grupi prvi zadatak je kompletno uradilo 39 učenika, 11 učenika delimično i nema učenika sa 0 bodova. Drugi zadatak je kompletno uradilo 32 učenika, delimično 18 i nema učenika sa 0 bodova. Treći zadatak je kompletno uradilo 26 učenika, delimično 24 i takođe nema učenika sa 0 bodova. Četvrti zadatak je rešilo 24 učenika. Od 49 učenika u kontrolnoj grupi prvi zadatak je kompletno uradilo 24 učenika, 22 učenika su uradila delimično i 3 učenika imaju 0 bodova. Drugi zadatak je kompletno uradilo 22 učenika, delimično 24 i 3 učenika imaju 0 bodova. Treći zadatak je kompletno uradilo 11 učenika, delimično 26 i 12 učenika imaju 0 bodova. Četvrti zadatak je uradilo 16 učenika.

**Tabela 1.** Broj osvojenih bodova na kontrolnom zadatku u 7. razredu

| Grupa           | Ukupno učenika | Broj osvojenih bodova |    |        |         |    |        |         |   |    |         |   |   |    |        |
|-----------------|----------------|-----------------------|----|--------|---------|----|--------|---------|---|----|---------|---|---|----|--------|
|                 |                | zadatak               |    |        | zadatak |    |        | zadatak |   |    | zadatak |   |   |    |        |
|                 |                | 0                     | 10 | ostali | 0       | 15 | ostali | 0       | 2 | 12 | ostali  | 0 | 3 | 13 | ostali |
| Eksperimentalna | 50             | 0                     | 18 | 32     | 0       | 11 | 39     | 0       | 6 | 15 | 29      | 0 | 6 | 12 | 32     |
| Kontrolna       | 51             | 3                     | 15 | 33     | 5       | 9  | 37     | 2       | 8 | 9  | 32      | 6 | 8 | 6  | 31     |

**Tabela 2.** Broj osvojenih bodova na kontrolnom zadatku u 8. razredu

| Grupa           | Ukupno učenika | Broj osvojenih bodova |    |        |         |    |        |         |    |        |         |    |
|-----------------|----------------|-----------------------|----|--------|---------|----|--------|---------|----|--------|---------|----|
|                 |                | zadatak               |    |        | zadatak |    |        | zadatak |    |        | zadatak |    |
|                 |                | 0                     | 10 | ostalo | 0       | 10 | ostalo | 0       | 10 | ostalo | 0       | 10 |
| Eksperimentalna | 50             | 0                     | 39 | 11     | 0       | 32 | 18     | 0       | 26 | 24     | 26      | 24 |
| Kontrolna       | 49             | 3                     | 24 | 22     | 3       | 22 | 24     | 12      | 11 | 26     | 33      | 16 |



**Slika 2.** Prosečan broj bodova po zadacima u eksperimentalnoj i kontrolnoj grupi u 7. i 8. razredu

Prosečan broj bodova u eksperimentalnoj grupi u prvom zadatku bio je 9,12, u drugom 8,41, u trećem 9,04, u četvrtom 4,8 i u celom testu 31,38. U kontrolnoj grupi prosečan broj bodova u prvom zadatku bio je 7,95, u drugom 7,43, u trećem 5,43, u četvrtom 3,26 i u celom testu 24,07. Dobijeni rezultati pokazuju da je eksperimentalna grupa bila uspješnija od kontrolne u proseku za 7,31 bodova po učeniku. Ako pogledamo grafički prikaz ovih rezultata učinak rada u saradničkim grupama uz računarsku podršku je još očigledniji i uočljiviji (Slika 2b.).

## ZAKLJUČAK

Upoznavanje učenika 7. i 8. razreda osnovne škole sa prikazivanjem tačaka i grafika linearnih funkcija u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu pomoću računara i GeoGebre dalo je dobre rezultate. Učenici su doživeli prikazani rad kao učenje kroz igru. U razgovoru sa njima nakon časova saznali smo da im je nastava matematike obavljena uz računarsku podršku bila veoma interesantna a učenje novih pojmova zabavno. Saradnički rad u eksperimentalnim grupama dao je takođe dobre rezultate. Učenici koji su brže ovladavali predviđenom materijom objašnjavali su drugim članovima grupe što je doprinelo njihovom bržem napredovanju. Rezultat toga se ogleda u činjenici da ni jedan učenik eksperimentalne grupe u oba razreda nema 0 bodova ni u jednom zadatku dok je u kontrolnim grupama bilo učenika sa 0 bodova.

Učenici 7. razreda su u interaktivnom radu u GeoGebri učili koordinate tačaka u Dekartovoj ravni. Dobijajući odmah povratnu informaciju o korektnosti svojih zaključaka mogli su da koriguju pogrešno shvaćeno i da brže napreduju. Pored interaktivnog rada GeoGebra im je omogućila vizuelizaciju novih pojmova. Za određivanje dužine proizvoljne duži bio je dovoljan samo mali podsticaj od nastavnika nakon čega su učenici samostalno došli do rešenja.

Radeći u GeoGebri učenici 8. razreda su imali mogućnost da dobiju na ekranu grafik funkcije i uporede ga sa sopstvenim crtežom. To im je omogućavalo da odmah uoče svoje greške i pomoću tačnog rešenja nauče ispravno da rade zadatke. Takođe im je rad u GeoGebri omogućio veći broj urađenih zadataka što im je pomoglo da na času imaju uvid u mnoštvo različitih grafika funkcija.

U ovom radu pokazali smo kako korišćenje savremenih tehnologija proizvodi višestruku korist u

nastavi. Učenje čini interesantnim a učenike osposobljava da koriste računar i softverske pakete u sazajne svrhe. Time je ispunjen i jedan od glavnih ciljeva savremenog obrazovanja – osposobljavanje učenika za aktivno korišćenje informacionih i komunikacionih tehnologija, široko rasprostranjenih u savremenom društvu. Na osnovu pokazanog možemo zaključiti da je učenje osnovnih pojmova u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu putem računara i GeoGebre veoma delotvorno i efikasno. Učeci u okruženju GeoGebre učenici su mogli odmah da provere da li je njihovo znanje ispravno. Dobijali su odmah rešenje na ekranu i na taj način proveravali svoje znanje i korigovali pogrešno shvaćeno i urađeno u zadatku. Takođe možemo zaključiti da je učenje u saradničkim grupama mnogo efikasnije od samostalnog učenja. U saradničkom radu učenici imaju osećaj odgovornosti za uspeh cele grupe što doprinosi većoj motivisanosti i boljim rezultatima.

Na osnovu rezultata našeg istraživanja možemo preporučiti korišćenje računara i softverskog paketa GeoGebra u nastavi matematike, kako u oblastima sa grafičkim prikazima elemenata, kao što je prikazano u našem radu, tako i u drugim oblastima koje podržava GeoGebra.

## LITERATURA

- Abu Bakar, K., Ayub, M., Fauzi, A., & Ahmad Tarmizi, R. (2010). Utilization of computer technology in learning transformation. *International Journal of Education and Information Technologies*, 4(2), 91-99.
- Allegra, M., Chifari, A., & Ottaviano, S. (2001). ICT to train students towards creative thinking. *Educational Technology & Society*, 4(2), 48-53.
- Bozkurt, G., & Ruthven, K. (2016). Classroom-based professional expertise: a mathematics teacher's practice with technology. *Educational Studies in Mathematics*, 1-20.
- Chai, C., Lin, W.-Y., So, H.-J., & Cheah, H.M. (2011). *Advancing collaborative learning with ICT: Conception, cases and design*. Singapore: Ministry of Education.
- Diković, L. (2009). Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level. *Computer Science and Information Systems*, 6(2), 191-203.
- Dogru, M., & Kalender, S. (2007). Applying the subject 'cell' through constructivist approach during science lessons and the teacher's view. *Journal of Environmental & Science Education*, 2(1), 3-13.

- Dooly, M. (2008). Constructing knowledge together. U M. Dooly (ur.), *Telecollaborative language learning. A guidebook to moderating intercultural collaboration online* (str. 21-24). Bern: Peter Lang.
- Doruk, B. K., Aktumen, M., & Aytakin, C. (2013). Pre-service elementary mathematics teachers' opinions about using GeoGebra in mathematics education with reference to 'teaching practices'. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 32(3), 140-157.
- Figueira-Sampaio, A. d. S., dos Santos, E. E. F. & Carrijo, G. A. (2009). A constructivist computational tool to assist in learning primary school mathematical equations. *Computers & Education*, 53(2), 484-492.
- Garcia, C. P. (2013). A constructivist computational platform to support mathematics education in elementary school. *Computers & Education*, 66, 25-39.
- Gomez, E. A., Wu, D., & Passerini, K. (2010). Computer-supported team-based learning: the impact of motivation, enjoyment and team contributions on learning outcomes. *Computers & Education*, 55(1), 378-390.
- Hohenwarter, J., Hohenwarter, M., & Lavicza, Z. (2009). Introducing dynamic mathematics software to secondary school teachers: The case of GeoGebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 28(2), 135-146.
- Hohenwarter, M., & Fuchs, K. (2004, Juli). *Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra*. Rad prezentiran na *Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference 2004, Pecs, Hungary*.
- Kim, C. Y. (2002). Teachers in digital knowledge-based society: new roles and vision. *Asia Pacific Education Review*, 3(2), 144-148.
- Laal, M., & Ghodsi, S. M. (2012). Benefits of collaborative learning. *Procedia-Social and Behavioral Science*, 31, 486-490.
- Maněnová, M., Skutil, M., & Zikl, P. (2010). Taking advantage of ITC by teachers at the primary school. U A. Kalel, A. Hassairi, C. A. Bulucea & N. Mastorakis, *Advanced Educational Technologies, Proceedings of 6th WSEAS/IASME International Conference on Educational Technologies (EDUTE'10)* (str. 48-52). Sousse, Tunisie: WSEAS.
- Ruthven, K. (2009). Towards a naturalistic conceptualisation of technology integration in classroom practice: The example of school mathematics. *Education and Didactique*, 3(1), 131-159.
- Ruthven, K., Hennessy, S., & Deaney, R. (2008). Constructions of dynamic geometry: A study of the interpretative flexibility of educational software in classroom practice. *Computers and Education*, 51(1), 297-331.
- Saha, R. A., Ayub, A. F. M., & Tarmizi, R. A. (2010). The effects of GeoGebra on mathematics achievement: enlightening coordinate geometry learning. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 8, 686-693.
- Takači, Đ., Stankov, G., & Milanovic, I. (2015). Efficiency of learning environment using GeoGebra when calculus contents are learned in collaborative groups. *Computers and Education*, 82, 421-431.
- Viamonte, A. J. (2010). The computer in the teaching of mathematics. U A. Kalel, A. Hassairi, C. A. Bulucea & N. Mastorakis, *Advanced Educational Technologies, Proceedings of 6th WSEAS/IASME International Conference on Educational Technologies (EDUTE'10)* (str. 24-29). Sousse, Tunisie: WSEAS.
- Zengin, Y., Furkan, H., & Kutluca, T. (2012). The effect of dynamic mathematics software geogebra on student achievement in teaching of trigonometry. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 31, 183-187.

## INFORMACIJE O AUTORIMA

### Miroslava Mihajlov Carević

Faculty of Mathematics and Computer Science  
Alfa BK University  
Palmira Toljatija 3, Novi Beograd, Serbia  
e-mail: miroslava.carevic.mihajlov@alfa.edu.rs

### Lazar Kopanja

Faculty of Mathematics and Computer Science  
Alfa BK University  
Palmira Toljatija 3, Novi Beograd, Serbia  
e-mail: lazar.kopanja@alfa.edu.rs

### Nebojša Denić

Faculty of Mathematics and Computer Science  
Alfa BK University  
Palmira Toljatija 3, Novi Beograd, Serbia  
e-mail: nebojsa.denic@alfa.edu.rs