mr sc Ismet Temaj
Edukativni fakultet Univerziteta u Prištini

UDK 517.383:571.3

Teorema srednje vrijednosti za Pettis, McShane i Kurzweil-Henstockov integral funkcija s vrijednostima u lokalno-konveksnim prostorima

Sažetak

Teorema srednje vrijednosti za Rimanov integral dobro je poznata u matematičkoj analizi. Jedna slična teorema za Bohnerov integral za funkcije s vrijednostima u Banahovim prostorima data je u [8]. U ovom radu, dokazuje se teorema srednje vrijednosti za Pettis, McShane i Kurcweil-Henstockov integral funkcija s vrijednostima u lokalno-konveksnim prostorima.

Ključne riječi: Bohner-integral, Petiss-integral, McShane i Kurzweil-Henstock-integral, teoreme o srednjoj vrijednosti, lokalno-konveksni prostor.

Uvod

U ovom radu uočeni su novi odnosi koji se stvaraju na jednom lokalno-konveksnom prostoru, gdje su korišćeni poznati pojmovi integracije na ovim prostorima konsultirajući naročito definicije date kod [7] i [5]. Ovdje su uzete u razmatranje veze između klasa integralnih funkcija Bohnera, McShaina i Petisa. Rad se odnosi na teoremu o srednjoj vrijednosti za Pettis, Makshein i Kurzweil-Henstockov integral funkcija s vrijednostima u lokalno-konveksnim prostorima.

Definicije i simboli

U drugoj tački ovog rada, X-prostori smatraće se kao jedan Banahov prostor. Treću tačku obilježićemo s V, što je lokalno-konveksan prostor. S obzirom da su odgovarajuće definicije u Banahovom prostoru veoma poznate, pozivajući se na primjer [3] ili [5], možemo istaći jedan relativan broj novih definicija na lokalno-konveksim prostorima koje su prosto uopćavanje onih u slučaju Banahovih prostora. Za ove definicije pozivamo se na [7] , [1] i [10].

Pretpostavimo da V, kao lokalno-konveksan prostor, sadrži topologiju τ i dualnu topologiju V*. S P(V) obilježimo familiju neprekidnih polunormi τ na V, dakle topologjija V je generirana od P(V).

Za skup E s $\mu(E)$, $m(E)$ i $\chi_{E(x)}$ nazvaćemo redom Lebegovu mjeru, mjeru prebrojivih aditivnih vektora i karkteristično funkcije skupa E. Po Lebegu, familiju samjerljivih skupova smatraćemo simbolom Σ. Pod intervalom podrazumijevamo jedan kompaktan interval na R . Jedna kolekcija intervala naziva se disjunktom ako se njihove unutrašnjosti ne sijeku. Podjela C u S=[a,b] je jedna kolekcija $\{(I_i, t_i)$: $i=1,2,...r\}$, gdje su $I_1,..., I_r$ nenametnuti intervali, gdje $t_1,...,t_r$ pripadaju S. (S,Σ,μ) je prostor vjerovatne mjere.

Neka je $E\subset R$, kaže se da je podjela C.

a) je podjela u E ako $\bigcup_{i=1}^{r} I_i \subset E$
b) je podjela E ako $\bigcup_{i=1}^{r} I_i = E$;
c) je Peronova podjela ili K-podjela, ako $t_i \in I_i$, $i=1,...,r$
d) ako za t_i tražimo samo t_i S, podjela će se zvati M- podjela.

Neka je $f : S\to X$ i $C=\{(I_i, t_i) : i=1,\ldots,r\}$ jedna podjela u S, Rimanova integralna suma naziva se suma:

$$\sigma(f,C)=\sum_{i=1}^{r} f(t_i)\mu(I_i) .$$

Dijametar na $E \subset S$ je pozitivna funkcija $\delta : E \to]0, \infty[$ na E. Za dati dijametar δ na E jedno podjela $C=\{(I_i, t_i) : i=1,\dots,r\}$ u S naziva se δ-fin ako $I_i \subset]t_i - \delta(t_i), t_i+\delta(t_i)[$.

Funkcija $f : S \to X$ naziva se:

a) jako mjerljiva ako postoji niz prostih funkcija $(f_n)_n$ koje odgovaraju normi (kratko s,s) na S, dakle $f_n(t) \xrightarrow{n} f(t)$ s.s.,

b) mjerljiva je po polunormama ako za svako $p \in P(X)$ postoji niz prostih funkcija $(f_n^p)_n$, tako da: $\lim_{n\to\infty} p(f_n^p(t) - f(t)) = 0$, s.s.

c) slabo je mjerljiva ako je funkcija x^*f mjerljiva za svako $x^* \in X^*$.

Definicija1. *Funkcija $f : S \to X$ naziva se jako integrabilna ili integrabilna po Bohneru ako postoji niz prostih funkcija $(f_n)_n$ takvih da je*:

(i) $f_n(t) \to f(t)$, s.s.

(ii) $p(f(t)-f_n(t)) \in L^1(S)$ za svako $n \in N$ i $p \in P(X)$ kao i $\lim_{n\to\infty} \int_S p(f(t) - f_n(t))dt = 0$ *za svako $p \in P(X)$;*

(iii) $\int_A f_n$ *odgovara u X za svaki mjerljiv podskup A skupa S.*

U ovom slučaju integral:

$$(B)\int_A f = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n .$$

je Bohnerov integral.

Definicija 2. *Funkcija $f : S \to X$ naziva se integrabilna po polunormama ako za svako $p \in P(X)$ postoji niz prostih funkcija $(f_n^p)_n$ tako da:*

(i) $\lim_{n\to\infty} p(f_n^p(t) \to f(t)) = 0$, s.s.

(ii) $p(f(t)-f_n(t)) \in L^1(S)$ za svako $n \in N$ i $p \in P(X)$ kao i $\lim_{n\to\infty} \int_S p(f(t) - f_n^p(t))dt = 0$ *za svako $p \in P(X)$;*

(iii) za svaki mjerljiv podskup A iz S nalazi se element $y_A \in X$ takav da $\lim_{n\to\infty} p(\int_A f_n^p(t) - y_A) = 0$ *za svako $p \in P(X)$. U ovom slučaju obilježavamo* $y_A = \int_A f$.

Jasno je da je funkcija integrabilna po Bohneru i integrabilna po polunormi i da se obje definicije poklapaju u Banahovom prostoru.

Definicija 3. *Funkcija* $f : S \to X$ *naziva se integrabilna po Petisu ako* x^*f *je integrabilna po Lebegu u S: za svako* $x^* \in X^*$ *i za svako* $E \in \Sigma$ *mogu se naći vektori* $m_f(E) \in X$ *takvi da* $x^*(m_f(E)) = \int_E x^* f(t)dt$ *za svako* $x^* \in X^*$.

Odredimo funkciju:

$m_f : \Sigma \to X \quad , m_f(E) = \int_E f(s)d\mu \quad , E \in \Sigma$ koja se zove integralna mjera funkcije f. Poznato je da m_f je mjera prebrojivog aditivnog vektora apsolutno neprekidna u odnosu sa Lebegovom mjerom μ i pišemo $v << \mu$, odnosno $dv << d\mu$, ako je $(\forall E \in \Sigma)[\mu(E) = 0 \Rightarrow m(E) = 0]$.

Upućujući se na [6], [5] i [11], sjetimo se definicije o lokalno-konveksim prostorima McShainovog i Kurcweil-Henstockovog integrala.

Definicija 4. *Funkcija* $f : S \to X$ *zove se McShain –integrabilna odnosno Kurcweil-Henstock-integrabilna, (kratko MCS –integrabilna odnosno KH - integrabilna) u S, ako se može naći jedan vektor* $\omega \in X$, *koji ima sljedeće navedene osobine: neka je data* $\varepsilon > 0$ *i* $p \in P(X)$, *tada se nalazi jedan diametar* δ_p *u S, tako da za svaku podjelu,* δ_p*-fin , odnosno Perronova podjela* $C = \{(I_i, t_i) : i = 1, \ldots, r\}$,*koja je iz S , tada imamo:*

$$p(\sigma(f,C) - \omega) < \varepsilon.$$

Uopštavanje pojma esencijalne vrijednosti za integrabilne funkcije po μ-ju sa vrijednostima u jedno lokalno-konveksnom prostoru [PNOM]

U ovom se dijelu govori o vektorijalno-topološkim odnosima između esencijalne vrijednosti i srednje vrijednosti jedne vektor-mjere.

Definicija 5. *Ako je lokalno-konveksni prostor* (V, τ), *potpun po nizovima, i svaki ograničen skup u tom prostoru je metrizabilan, tada, kraće, kažemo da lokalno konveksan prostor* (V, τ) *ima osobinu* ***[PNOM].***

Familja

$$\beta = \{U_{I,\varepsilon} \in P(V) \,/\, U_{I,\varepsilon} = \bigcap_{\alpha \in I} U_{\alpha,\varepsilon} \text{ za svaki ogranicen podskup } I \subset A \text{ i za svako } \varepsilon > 0\}$$

biće jedna baza okoline nule u lokalno konveksnom prostoru (V, τ), gdje je A skup indeksa i $U_{\alpha,\varepsilon} = \{x \in V \,/\, p_\alpha(x) < \varepsilon\}$.

Definicija 6. *Neka su dati prostori potpune vjerovatnoće* $\left(S,\Sigma,\mu\right)$ *i lokalno konveksan prostor* (V,τ) *koji ima osobinu* ***[PNOM].*** *Tada je srednja vrijednost samjerljivi skup* $E\in\Sigma^{+}$, *mjere prebrojivog aditivnog vektora* $m_f:\Sigma\to V$ *po* μ, *koji se obilježava* $A_E(m)$:

$$A_E(m)=\left\{\frac{m(F)}{\mu(F)}\in V\,/\,F\in\Sigma^{+},F\subset E\right\}$$

Definicija 7. *Neka je dat lokalno konveksni prostor* (V,τ) *koji ima osobinu* ***[PNOM]*** *i skup A na ovom prostoru. Tada, zatvaranje konveksne obvojnice skupa A zovemo zatvorena konveksna obvojnica skupa A. Simboličkim zatvaranjem konveksne obvojnice skupa A obilježavamo* $c\overline{o}(A)$.

Definicija 8. *Neka je data funkcija* $f:S\to V$, *integrabilna po* μ*-u lokalno konveksnom prostoru* (V,τ) *koja ima osobinu* ***[PNOM].*** *Tada ćemo je nazvati esencijalnom vrijednošću funkcije kod* f *nad* $E\in\Sigma$ *skup* $x\in V$ *takvih da za svako* $\varepsilon>0$ *i za svaki konačan podskup* I *skupa* A, imamo :

$$\mu\left(\left\{s\in E\,/\,(\forall\alpha\in I)[p_\alpha(f(s)-x)<\varepsilon]\right\}\right)>0$$

Obilježavamo sa $th_E(f)$, esencijalnu vrednosti funkcije f nad mjerljivi skup E. Dakle, imamo:

$$th_E(f)=\left\{s\in E\,/\,(\forall\alpha\in I)[p_\alpha(f(s)-x)<\varepsilon\right\}=\left\{s\in E\,/\,f(s)\in x+U_{I,\varepsilon}\right\}=$$
$$=f^{-1}(x+U_{I,\varepsilon})\cap E$$

Stoga je:

$$th_E(f)=\left\{x\in V\,/\,\mu\left(f^{-1}(x+U_{I,\varepsilon})\cap E\right)>0,\ za\ svako\ I\subset A\ (I\ konaćan)\ i\ \forall\varepsilon:0\right\}$$

Bazirajući se na definiciju 8. lahko se uočava da za svako $E\in\Sigma$, imamo :

a) Skup $th_E(f)$ je zatvoren podskup u V.
b) $th_E(f)\subset\overline{f(E)}$

Lema 1.([5]). Neka su lokalno konveksni prostori (V,τ) koji imaju osobine **[PNOM],** i podskup C zatvoren konveksan i ograničen u datom prostoru i $E\in\Sigma^{+}$. U uslovima ako je funkcija $f:S\to V$ integrabilna, tada :

$$th_E(f)\cap f(E)\neq\phi$$

Posljedica 1. Neka je dat ograničen podskup C, lokalno konveksnog prostora (V,τ) koji ima osobinu **[PNOM],** funkcija $f:S\to C$ integrabilna po μ u lokalno-konveksnom prostoru (V,τ), i $E\in\Sigma^{+}$, tada je skup:

$$M=\{s\in E\,/\,f(s)\notin th_E(f)\}\text{ s mjerom nula po }\mu.$$

Zaista, ako pretpostavimo da $\mu(M)>0$ tada iz Leme 1. slijedi da se može naći $s\in M$ tako da:

$$f(s)\in th_M(f)\subset th_E(f),$$

koja se protivi definiciji skupa M i obara pretpostavku. Dakle, ostaje da $\mu(M)=0$.

Iskaz 1. [7 Iskaz 2**]** Neka je $(E_n)_n$ jedan niz mjerljivih disjunkivnih skupova na S i $(x_n)_n$ jedan niz na V. Neka je $f: S\to V$ takva da:

$$f(t)=\sum_n x_n\chi_{E_n}(x).$$

Ako red $\sum_n x_n\mu(E_n)$ konvergira na bezuslovni način, tada je funkcija f McS-integrabilna na S i:

$$(McS)\int_S f=\sum_n x_n\mu(E_n).$$

Primijenićemo činjenicu da je svaki konveksan podijeljeni prostor projektivni limes normalnih prostora (vidi [2, str.86]). Za svaku neprekidnu polunormu p na koneksnom prostoru V, $p^{-1}(0)$ je vektorski prostor i p određuje jednu normu u $V\backslash p^{-1}(0)$. V_p je Banahov pridruženi prostor koji se zove dopuna linearnog prostora normiran na $X\backslash p^{-1}(0)$ i π_p je kanonska projekcija V na V_p. To znači da je V jedan projektivni limes prostora V_p pomoću kanonskog projektiranja π_p , V na V_p.

Za jednu funkciju $f: S\to V$ i za svako $p\in P(V)$, definiramo funkciju $f_p : S\to V_p$ pomoću formule:

$$f_p(t)=(\pi_p\circ f)(t)=\pi_p(f(t))$$

za $t\in S$.

Glavni rezultat

Teorema 1. (Teorema srednje vrijednosti) Ako je funkcija $f : S \to K$ (gdje je K konveksan skup, zatvoren i ograničen u prostoru koji ima osobinu [PNOM]) Pettis integrabilna i mjerljiva po polunormi, tada je ona McShane integrabilna (KH integrabilne) i obje se poklapaju. Tada za $E \in \Sigma^{+}$ imamo:

$$A_E(m_f) \subset c\overline{o}(th_f(E)) \qquad (1),$$

što znači da se za svako $F \in \Sigma^{+}$, $F \subset E$ nađe $x_F \in c\overline{o}(th_E(f))$, tako da:

$$(P)\int_F f(s)d\mu = (McS)\int_F f(s)d\mu = (KH)\int_F f(s)d\mu = x_F\mu(F) \qquad (2)$$

Dokaz: Neka je funkcija f Pettis integrabilna i mjerljiva po polunormi i neka je $p \in P(V)$, tada je:

$$f_p = \pi_p \circ f : S \to V_p$$

mjerljiva funkcija i Pettis integrabilna, prema tome iz [9, Teorema 17] uzimamo da je $f_p(t)$ McS integrabilna s integralom:

$$(McS)\int_S f_p(s)d\mu = \pi_p(v_f(S)).$$

Neka je $\varepsilon > 0$ fiksirano, tada postoji jedan dijametar, δ_p tako da ako $C = \{(I_i, t_i) / i = 1, 2, 3 \cdots r\}$ je jedno δ_p - fine na S, imamo:

$$p\left(\sigma(f_p, C) - (McS)\int_S f_p\right) < \varepsilon \qquad (3)$$

S obzirom da je:

$$p\left(\sigma(f_p, C) - (McS)\int_S f_p\right) = p\Big(\pi_p\big(\sigma(f, C) - v_f(S)\big)\Big)$$

iz (3) dobijamo:

$$p\Big(\pi_p\big(\sigma(f, C) - v_f(S)\big)\Big) = p\big(\sigma(f, C) - v_f(S)\big) < \varepsilon \; .$$

Time smo dokazali prvi dio teoreme.

Da bismo dokazali drugi dio teoreme, dokazujemo da $\dfrac{m(E)}{\mu(E)} \in c\overline{o}(th_E(f))$.

Prema tome, dovoljno je dokazati da za svaku okolinu nule $U_{I,\varepsilon} \in \beta$, imamo da:

$$\left(\frac{m(E)}{\mu(E)}+U_{I,\varepsilon}\right)\cap co(th_E(f))\neq\phi$$

Neka je data bilo kakva okolina nule $U_{I\varepsilon}\in\beta$.

Obilježimo: $p=\sup\{p_\alpha\in P(V)\,/\,\alpha\in I\}$ tada je ova jedna neprekidna polunorma na prostoru (V,τ) i $U_{p,\varepsilon}\subset U_{I,\varepsilon}$. Dokažimo da je:

$$\left(\frac{m(E)}{\mu(E)}+U_{p,\varepsilon}\right)\cap co(th_E(f))\neq\phi$$

S obzirom da se srednja vrijednost m - nad S obuhvata u K, imamo da:

$\frac{m(F)}{\mu(F)}\in K$ za svako $F\in\Sigma^+$, i s obzirom da je K ograničeno u (V,τ) prostoru,

tada postoji $k_p\in R^+$, tako da je $(\forall c\in K)\left[p(c)<k_p\right]$

dakle,

$$p\left(\frac{m(F)}{\mu(F)}\right)<k_p \qquad (4)$$

što će kao posljedica biti:

$$p\left(m(F)\right)\leq k_p\mu(F) \qquad (5)$$

Ovo znači da za $E\in\Sigma^+$ i za $\varepsilon>0$ (dakle i za $\frac{\varepsilon}{6}\mu(E)$) postoji takva $\delta>0$

($\delta=\frac{1}{k_p}\cdot\frac{\varepsilon}{6}\mu(E)$)) da za $F\in\Sigma^+, F\subset E$ i $\mu(E)<\delta$, imamo da:

$$p\left(m(F)\right)\leq\frac{\varepsilon}{6}\mu(E) \qquad (6)$$

S obzirom da je funkcija f i integrabilna po μ u prostoru (V,τ), tada postoji niz prostih funkcija $(f_n)_{n\in N}$ u prostoru (V,τ) tako da :

a) $f_n(t)\xrightarrow{n}f(t)$ s.s. po μ nad S. i

b) za svako $E\in\Sigma$ imamo niz $\left(\int_E f_n d\mu\right)_{n\in N}$ koji konvergira u prostoru (V,τ).

Dakle, za $\delta>0$ postoji $F\in\Sigma^+, F\subset E$ takvo da:

$$\mu(E\setminus F)<\delta \quad \left(\text{čak } \mu(E\setminus F)<\frac{\varepsilon}{6k_p}\mu(E)\mu(F)\right) \qquad (7)$$

i niz $(f_n)_{n\in N}$ uniformno konvergira nad F , kod funkcije f . Primjećujemo da:

$$p\left(\frac{m(E)}{\mu(E)}-\frac{m(F)}{\mu(F)}\right)=p\left(\left(\frac{m(E)}{\mu(E)}-\frac{m(F)}{\mu(E)}\right)+\left(\frac{m(F)}{\mu(E)}-\frac{m(F)}{\mu(F)}\right)\right)\le$$

$$\le p\left(\frac{m(E)}{\mu(E)}-\frac{m(F)}{\mu(E)}\right)+p\left(\frac{m(F)}{\mu(E)}-\frac{m(F)}{\mu(F)}\right)=$$

$$=\frac{1}{\mu(E)}p\big(m(E\setminus F)\big)+\frac{\mu(E\setminus F)}{\mu(E)\mu(F)}p\big(m(F)\big)<$$

$$<\frac{1}{\mu(E)}\frac{\varepsilon}{6}\mu(E)+\frac{\varepsilon}{6k_p}p\big(m(F)\big)<\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}=\frac{\varepsilon}{3}$$

Dakle:

$$p\left(\frac{m(E)}{\mu(E)}-\frac{m(F)}{\mu(F)}\right)<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (8)$$

Dovoljno je dokazati $\left(\frac{m(F)}{\mu(F)}+U_{p,\frac{2\varepsilon}{3}}\right)\cap co(th_E(f))\neq\phi$. S obzirom da niz $(f_n)_{n\in N}$ uniformno konvergira nad F, kod funkcije f, postoji $n_1\in N$ tako da za $n>n_1$, imamo $p\big(f(s)-f_n(s)\big)<\frac{\varepsilon}{4}$ za sve $s\in F$, i s obzirom da:

$$\int_F f_n(s)d\mu \underset{n\to\infty}{\to} \int_F f(s)d\mu$$

u prostoru (V,τ) , postoji $n_2\in N$, tako da za $n>n_2$, imamo

$$p\left(\int_F f_n(s)d\mu - \int_F f(s)d\mu\right)<\frac{\varepsilon}{3}\mu(F)$$

Kao posljedicu imamo da:

$$p\left(\frac{\int_F f(s)d\mu}{\mu(F)}-\frac{\int_F f_m(s)d\mu}{\mu(F)}\right)=\frac{1}{\mu(F)}p\left(\int_F f(s)d\mu - \int_F f_m(s)d\mu\right)<$$

$$<\frac{1}{\mu(F)}\frac{\varepsilon}{3}\mu(F)=\frac{\varepsilon}{3}$$

Dakle:

$$p\left(\frac{\int_F f(s)d\mu}{\mu(F)}-\frac{\int_F f_m(s)d\mu}{\mu(F)}\right)<\frac{\varepsilon}{3}$$

ili:

$$p\left(\frac{m(F)}{\mu(F)}-\frac{\int_F f_m(s)d\mu}{\mu(F)}\right)<\frac{\varepsilon}{3}$$

Dovoljno je dokazati:

$$\left(\frac{\int_F f_m(s)d\mu}{\mu(F)}+U_{p,\frac{\varepsilon}{3}}\right)\bigcap co(th_E(f))\neq\phi .$$

Primjećujemo da:

$$\int_F f_m(s)d\mu=\sum_{i=1}^{l_1}\mu(E_i\cap F)\cdot x_i$$

ako su:

$f_m=\sum_{i=1}^{l_1}\chi_{E_i}(s)\cdot x_i$ za svako $s\in S$, gde su $x_i\in E_i$, $\chi_{E_i}(s)$ karakteristične funkcije skupova $E_i\in\Sigma$ za $i=1,2,3\cdots l_1$ i ovi skupovi su dva po dva disjunktivni i $\bigcup_{i=1}^{l_1}E_i=S$.

Obilježimo $M=\{s\in F\setminus f_m(s)\notin th_E(f_m)\}$, tada je po Lemi 1. i posljedica 1. Skup M je skup sa mjerom nula, po μ .

Primjećujemo da ako $x_i\notin th_F(f_m)$, i s obzirom da $E_i=f_m^{-1}(x_i)$, tada $f_m^{-1}(x_i)\bigcap F=E_i\bigcap F\subset M$. Dakle, ako je $x_i\notin th_F(f_m)$, tada $\mu(E_i\cap F)=0$. Ovo znači da ako razmatramo samo element x_i (za $i=1,2,3\cdots l_1$) koji je esencijalne vrijednosti od f_m nad F i zanemarimo druge, vrijednost integrala $\int_F f_m(s)d\mu$ se ne mijenja, dok se funkcija f_m mijenja nad jednim podskupom od F, koji ima mjeru nula po μ . Obilježimo ove elemente sa a_j , zar $j=1,2,3\cdots l_2$ ($l_2<l_1$). Tada ćemo dobiti:

$\int_F f_m(s)d\mu=\sum_{i=1}^{l_1}\mu(E_i\cap F)\cdot x_i=\sum_{j=1}^{l_2}\mu(E_j\cap F)\cdot a_j$ i $\mu(E_j\cap F)>0$, jer

$a_j \in th_F(f_m)$, za $j = 1,2,3\cdots l_2$, i :

$$f_m(s) = \sum_{j=1}^{l_2} \chi_{E_j \cap F}(s) \cdot a_j \quad \text{za svako } s \in F.$$

Ako obilježimo sa $F_j = E_j \cap F$ za $j = 1,2,3\cdots l_2$, imaćemo da:

$$f_m(s) = \sum_{j=1}^{l_2} \chi_{F_j}(s) \cdot a_j \quad \text{za svako } s \in F \text{ , i}$$

$\int_F f_m(s)\,d\mu = \sum_{j=1}^{l_2} \mu(F_j) \cdot a_j$, gdje se podskupovi F_j ne sijeku dva po dva , $\mu(F_j) > 0$ i $a_j \in F_j$, za $j = 1,2,3\cdots l_2$. Također, primjećujemo da $\sum_{j=1}^{l_2} \frac{\mu(F_j)}{\mu(F)} = 1$

S sobzirom da:

$$p\big(f(s) - f_m(s)\big) < \frac{\varepsilon}{4}$$

za sve $s \in F$, i $a_j \in th_F(f_m)$, tada po ([5] Leme 2. str.47) za svako $j = 1,2,3\cdots l_2$ naći će se $b_j \in th_F(f)$ da je :

$$p\big(a_j - b_j)\big) \le \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{3} \; .$$

Kao posljedicu imamo:

$$p\left(\frac{\int_F f_m(s) d\mu}{\mu(F)} - \sum_{j=1}^{l_2} \left(\frac{\mu(F_j)}{\mu(F)} b_j \right) \right) = \frac{1}{\mu(F)} \cdot \left(\int_F f_m(s) d\mu - \sum_{j=1}^{l_2} \mu(F_j) b_j \right) =$$

$$= \frac{1}{\mu(F)} \cdot p\left(\sum_{j=1}^{l_2} \mu(F_j) a_j - \sum_{j=1}^{l_2} \mu(F_j) b_j \right) = \frac{1}{\mu(F)}\, p\left(\sum_{j=1}^{l_2} \mu(F_j)(a_j - b_j) \right) \le$$

$$\le \frac{1}{\mu(F)} \left[\sum_{j=1}^{l_2} p(\mu(F_j)(a_j - b_j)) \right] = \frac{1}{\mu(F)} \left[\sum_{j=1}^{l_2} \mu(F_j) p((a_j - b_j)) \right] <$$

$$< \frac{1}{\mu(F)} \left[\sum_{j=1}^{l_2} \mu(F_j) \frac{\varepsilon}{3} \right] = \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{\mu(F)} \left[\sum_{j=1}^{l_2} \mu(F_j) \right] = \frac{\varepsilon}{3}$$

Dakle:

$$p\left(\frac{\int_F f_m(s)d\mu}{\mu(F)} - \sum_{j=1}^{l_2}\left(\frac{\mu(F_j)}{\mu(F)}b_j\right)\right) < \frac{\varepsilon}{3}$$

primjećujemo da $b_j \in th_F(f)$, za $j = 1,2,3\cdots l_2$ i $\sum_{j=1}^{l_2}\frac{\mu(F_j)}{\mu(F)} = 1$, što znači da:

$$\sum_{j=1}^{l_2}\left(\frac{\mu(F_j)}{\mu(F)}b_j\right) \in co(th_F(f)) \subset co(th_E(f))$$

Dakle, dokazali smo:

$$\left(\frac{\int_F f_m(s)d\mu}{\mu(F)} + U_{p,\frac{\varepsilon}{3}}\right) \bigcap co(th_E(f)) \neq \phi$$

Prema tome: $$x_F \in c\overline{o}(th_E(f)) \quad \left(\frac{m(F)}{\mu(F)} \in c\overline{o}(th_F(f))\right) \qquad (9)$$

Sobzirom da je f integrabilna, tada se za $\delta'' > 0$ nađe $F_\delta \in \Sigma^+, F_\delta \subset E$ tako da $\mu(F \setminus F_\delta) < \delta''$ (iz a) , b) , i (7)) i imajući u vidu da smo dokazali (9), imamo:

$$\frac{m(F_\delta)}{\mu(F_\delta)} \in c\overline{o}(th_{F_\delta}(f))$$

i kao posljedicu $\frac{m(F_\delta)}{\mu(F_\delta)} \in c\overline{o}(th_F(f))$ jer $c\overline{o}(th_{F_\delta}(f)) \subset c\overline{o}(th_F(f))$. Ovo znači da se može naći $x_F \in co(th_E(f))$, tako da:

$$p\left(x_F - \frac{m_f(F_\delta)}{\mu(F_\delta)}\right) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (10)$$

Dokažimo i da je x_F traženi element. Slično kao što smo dokazali i u (8), primjećujemo da:

$$p\left(\frac{m_f(F)}{\mu(F)} - \frac{m_f(F_\delta)}{\mu(F_\delta)}\right) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (11)$$

koristeći i (10), imamo da:

$$p\left(x_F - \frac{m_f(F)}{\mu(F)}\right) = p\left(\left(x_F - \frac{m_f(F_\delta)}{\mu(F_\delta)}\right) + \left(\frac{m_f(F)}{\mu(F)} - \frac{m_f(F_\delta)}{\mu(F_\delta)}\right)\right) =$$

$$= p\left(x_F - \frac{m_f(F_\delta)}{\mu(F_\delta)}\right) + p\left(\frac{m_f(F)}{\mu(F)} - \frac{m_f(F_\delta)}{\mu(F_\delta)}\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

što znači da je x_F traženi element.

Zaključak

Općenito u jednom lokalno-konveksnom prostoru nije izomorfno s projektivnim limesom Banahovim komponentima, već samo s jednim gušćim potprostorom u tom prostoru. Ovo je razlog da osnovni pojmovi integrala u Banahovim prostorima nemaju jasno analogne pojmove na bilo kakvom lokalno-konveksnom prostoru. U lokalno-konveksnom prostoru, koji ima osobinu PNOM, utvrđuju se pojmovi koji su analogni i jasni s integralnim pojmovima funkcije s vrijednostima u lokalno-konveksnom prostoru.

Literatura

[1] Blondia C, *Integration in locally convex spaces, simon Stevin* 55 (1981) 81-102.

[2] Robertson, A. P, Robertson, W, *Topological vector space*, Cambridge UNiv. Press, cambridge, 1964.

[3] Shwabic, S.Guoju,Y, *Topics in Banach space integration* (2005).

[4] Lee, P.Y, Vyborny, R, *The integral, an easy approch after Kurzweil and Henstock,* Cambridge university press, 2000.

[5] Memetaj, S, *Tema integrimi në hapësirat lokalisht konvekse*, Mokra, Tiranë 2007.

[6] Marraffa, V, *Riemann type integral for functions takeing values in a locally convex space,* Czech.Math.J. 56 (131) (2006), 475-489.

[7] Marraffa, V, *Nonabsolut convergent integrals of functions taking values in a locally convex space.* Rocky Mountain Jornal of Mathematics, 2006

[8] Rieffel, M, A, *The Radon Nikodym Theorem For the Bochner Integral*; Trans: Amer. Math Soc (1968).

[9] Gordon, R, *The McShane integrale of Banach valued functions Illinois i. Math34* (1990) , 557-567.

[10] Temaj, I, Tato, A, *On some theorems Vitaly-Caratheodory type ,* Buletini shkencor, 2008.

[11] Tato, A, Memetaj, S, *Aplikimi i marrëdhënieve K-H ne integrimin me vlera ne hapësirat lokalisht konvekse, sipas nje mase probabilitare te plote.* Buletini Shkencor, 2007.