

dr sc. Milenko Pikula  
Filozofski fakultet Univerziteta u Istočnom Sarajevu

mr sc. Elmir Čatrnja  
Nastavnički fakultet Univerziteta „Džemal Bijedić“ u Mostaru

UDK 517.9

## KARAKTERISTIČNA FUNKCIJA STURM-LIOUVILLEOVOG PROBLEMA SA FUNKCIJOM KAŠNJENJA $ax^2$

### SAŽETAK

*Sturm-Liouvilleov problem sa kašnjenjem i njegov obrnuti problem predstavljaju veoma značajnu matematičku oblast, kako sa teoretskog, tako i sa praktičnog stajališta, i imaju veliku primjenu u raznim prirodnim naukama. Postoje teoretski rezultati koji daju potrebne uslove i smjernice za rješavanje obrnutog problema za razne funkcije kašnjenja i razne klase funkcija potencijala. Pri tome se smatralo da kašnjenje spada u klasu apsolutno neprekidnih funkcija. Međutim, praktično rješavanje obrnutog problema je bilo nemoguće. Cilj ovog rada je da pripremi osnove za praktično rješavanje ovog problema, tako što se posmatra funkcija kašnjenja  $ax^2$  i formira karakteristična funkcija za Sturm-Liouvilleov problem sa kašnjenjem  $ax^2$  što otvara mogućnost predstavljanja kašnjenja u obliku polinoma.*

**Ključne riječi:** *Sturm-Liouvilleov problem, obrnuti problem, promijenjivo kašnjenje, karakteristična funkcija.*

### UVOD

U ovom radu posmatrat ćemo diferencijalnu jednačinu

$$-y''(x) + q(x)y(ax^2) = \lambda y(x).$$

Ovdje  $\lambda$  predstavlja proizvoljan kompleksan broj, dok je  $q(x)$  data realna funkcija. Izraz  $ax^2$  daje gornjoj jednačini karakter jednačine s otklonjenim argumentom. Mi ćemo posmatrati samo slučaj kada je kašnjenje funkcija  $ax^2$  predstavlja kašnjenje, i to promjenjivo, tj. smatraćemo da vrijedi  $0 < a < (2\pi)^{-1}$ .

Za funkciju  $q(x)$  pretpostavljamo da je Lebesgue integrabilna na segmentu  $[0, \pi]$ .

Mi ćemo u daljnjem posmatrati gornju diferencijalnu jednačinu zajedno sa graničnim uslovima

$$\begin{aligned}y'(0) - hy(0) &= 0 \\y'(\pi) + Hy(\pi) &= 0\end{aligned}$$

Pri tome ćemo smatrati da su  $h$  i  $H$  proizvoljni realni brojevi, mada se u opštem slučaju može smatrati da su  $h$  i  $H$  i kompleksni brojevi.

Stavimo da je operator Sturm-Liouvillea sa kašnjenjem  $L$  definisan sa

$$L(y(x)) := -y''(x) + q(x)y(ax^2)$$

i posmatrajmo spektralni problem  $L(y) = \lambda y$  pri uslovima gore datim graničnim uslovima. Ovdje  $\lambda$  smatramo spektralnim parametrom. Definiciono područje operatora  $L$  je skup dva puta diferencijabilnih funkcija na segmentu  $[0, \pi]$  koje zadovoljavaju granične uslove. Skup vrijednosti tog operatora je podskup od  $L_1[0, \pi]$ .

Direktni problem je problem određivanja svojstvenih vrijednosti operatora  $L$ . Da bismo saznali nešto više o svojstvenim vrijednostima, koristit ćemo se karakterističnom funkcijom.

### KARAKTERISTIČNA FUNKCIJA

Jednačina Sturm-Liouvillea sa kašnjenjem zajedno sa graničnim uslovima je ekvivalentna integralnoj jednačini Volterrinog tipa

$$y(x) = \cos zx + \frac{h}{z} \sin zx + \frac{1}{z} \int_0^x q(t) \sin z(x-t)y(at^2)dt,$$

što se lako provjerava metodom varijacije konstante. Zaista, napišimo jednačinu sa kašnjenjem u obliku

$$y''(x) + \lambda y(x) = q(x)y(ax^2).$$

Rješenje homogene jednačine

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0$$

jednako je

$$y = C_1 \cos zx + C_2 \sin zx, \quad (1)$$

gdje smo stavili  $z = \sqrt{\lambda}$ . Sada smatrajući da su  $C_1$  i  $C_2$  funkcije po promjenljivoj  $x$  diferenciranjem dobijamo

$$y'(x) = C_1'(x) \cos zx - C_1(x)z \sin zx + C_2'(x) \sin zx + C_2(x)z \cos zx.$$

Stavimo da je

$$C_1'(x) \cos zx + C_2'(x) \sin zx = 0$$

i nađimo  $y''(x)$ . Imamo

$$y''(x) = -C_1'(x)z \sin zx - C_1(x)z^2 \cos zx + C_2'(x)z \cos zx - C_2(x)z^2 \sin zx.$$

Uvrštavajući u početnu jednačinu dobijamo

$$-C_1'(x)z \sin zx + C_2'(x)z \cos zx = q(x)y(ax^2). \quad (2)$$

Sada iz (1) i (2), množeći prvu sa  $z \sin zx$ , a drugu sa  $\cos zx$  i sabirajući ih dobijamo

$$C_2'(x)(z \sin^2 zx + z \cos^2 zx) = q(x)y(ax^2) \cos zx,$$

pa je

$$C_2'(x) = \frac{1}{z} q(x)y(ax^2) \cos zx,$$

tj.

$$C_2(x) = C_2 + \frac{1}{z} \int_0^x q(t)y(at^2) \cos zt dt.$$

Slično, iz (1) i (2), množeći prvu sa  $z \cos zx$ , a drugu sa  $-\sin zx$  i sabirajući ih dobijamo

$$C_1(x) = C_1 + \frac{1}{z} \int_0^x q(t)y(at^2) \sin zt dt.$$

Uvrštavajući ovako dobijene  $C_1(x)$  i  $C_2(x)$  u rješenje homogene jednačine i koristeći se elementarnim trigonometrijskim transformacijama, konačno dobijamo

$$y(z, x) = C_1 \cos zx + C_2 \sin zx + \frac{1}{z} \int_0^x q(t) \sin z(x-t) y(at^2) dt.$$

Iz prvog od graničnih uslova imamo

$$y'(0) - hy(0) = 0,$$

a pošto su

$$y(0) = C_1 \cos z0 + C_2 \sin z0 + \frac{1}{z} \int_0^0 q(t) \sin z(0-t) y(at^2) dt = C_1,$$

i

$$y'(0) = -zC_1 \sin z0 + zC_2 \cos z0 + \frac{1}{z} \int_0^0 q(t) z \cos z(0-t) y(at^2) dt = zC_2,$$

to je

$$zC_2 - hC_1 = 0,$$

pa je  $C_2 = \frac{h}{z} C_1$ . Stavljajući da je  $C_1 = 1$  dobijamo navedenu integralnu jednačinu. U [3] se pokazuje da Volterrina jednačina ima jedinstveno rješenje. O rješenju dobijene integralne jednačine govori slijedeći teorem.

**Teorem 1.** Rješenje integralne jednačine dato je sa

$$\begin{aligned} y(x, z) = & \cos zx + \frac{h}{z} \sin zx + \frac{1}{z} \int_0^x q(t_1) \sin z(x-t_1) \cos zat_1^2 dt_1 + \\ & + \frac{h}{z^2} \int_0^x q(t_1) \sin z(x-t_1) \sin zat_1^2 dt_1 + \\ & + \sum_{l=2}^{\infty} \left( \frac{1}{z^l} \int_{D_l(x)} Q(T_l) \sin z(x-t_1) P(T_l, z) \cos zat_1^2 dT_l + \right. \\ & \left. + \frac{h}{z^{l+1}} \int_{D_l(x)} Q(T_l) \sin z(x-t_1) P(T_l, z) \sin zat_1^2 dT_l \right), \end{aligned} \quad (3)$$

gdje je

$$D_l(x) = \{(t_1, t_2, \dots, t_l) \mid 0 \leq t_1 \leq x, 0 \leq t_2 \leq at_1^2, \dots, 0 \leq t_l \leq at_{l-1}^2\},$$

$$Q(T_l) = \prod_{i=1}^l q(t_i), \quad P(T_l, z) = \prod_{i=1}^{l-1} \sin z(at_i^2 - t_{i-1}), \quad dT_l = dt_l dt_{l-1} \dots dt_1.$$

*Dokaz.* Dokaz ove teoreme izvodi se metodom uzastopnih aproksimacija stavljajući da je  $y_0(x, z) = \cos zx + \frac{h}{z} \sin zx$ , a zatim uvrštavajući u integralnu jednačinu dobijamo  $y_1(x, z)$ . Uvrštavajući  $y_1(x, z)$  u integralnu jednačinu dobijamo  $y_2(x, z)$ , itd. Može se uočiti, a matematičkom indukcijom i dokazati da  $y_n(x, z)$  ima slijedeći oblik.

$$\begin{aligned} y_n(x, z) = & \cos zx + \frac{h}{z} \sin zx + \frac{1}{z} \int_0^x q(t_1) \sin z(x - t_1) \cos zat_1^2 dt_1 + \\ & + \frac{h}{z^2} \int_0^x q(t_1) \sin z(x - t_1) \sin zat_1^2 dt_1 + \\ & + \sum_{l=2}^n \left( \frac{1}{z^l} \int_{D_l(x)} Q(T_l) \sin z(x - t_1) P(T_l, z) \cos zat_1^2 dT_l + \right. \\ & \left. + \frac{h}{z^{l+1}} \int_{D_l(x)} Q(T_l) \sin z(x - t_1) P(T_l, z) \sin zat_1^2 dT_l \right), \end{aligned} \quad (3)$$

Puštajući da  $n \rightarrow \infty$  u izrazu za  $y_n(x, z)$  dobijamo formulu (3). Detaljniji dokaz teoreme slične ovoj može se naći u [1].

Može se provjeriti da je funkcionalni red na desnoj strani jednačine (4) konvergentan pa, diferencirajući po članovima po promjenljivoj  $z$ , dobijamo

$$\begin{aligned} y'(x, z) = & -z \sin zx + h \cos zx + \int_0^x q(t_1) \cos z(x - t_1) \cos zat_1^2 dt_1 + \\ & + \frac{h}{z} \int_0^x q(t_1) \cos z(x - t_1) \sin zat_1^2 dt_1 + \\ & + \sum_{l=2}^{\infty} \left( \frac{1}{z^{l-1}} \int_{D_l(x)} Q(T_l) \cos z(x - t_1) P(T_l, z) \cos zat_1^2 dT_l + \right. \\ & \left. + \frac{h}{z^l} \int_{D_l(x)} Q(T_l) \cos z(x - t_1) P(T_l, z) \sin zat_1^2 dT_l \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Red u posljednjoj jednačini ravnomjerno konvergira po  $x$  na segmentu  $[0, \pi]$ , pa je provedena procedura diferenciranja po članovima dozvoljena. Sada koristeći (3) i (5), vodeći računa o drugom graničnom uslovu, dobijamo **karakterističnu funkciju**  $F(z)$  operatora  $L$ .

$$F(z) = \left( -z + \frac{hH}{z} \right) \sin \pi z + (h + H) \cos \pi z + \int_0^{\pi} q(t_1) \cos z(\pi - t_1) \cos zat_1^2 dt_1$$

+

$$\begin{aligned}
 & + \frac{H}{z} \int_0^{\pi} q(t_1) \sin z(\pi - t_1) \cos zat_1^2 dt_1 + \frac{h}{z} \int_0^{\pi} q(t_1) \cos z(\pi - t_1) \sin zat_1^2 dt_1 + \\
 & + \frac{hH}{z^2} \int_0^{\pi} q(t_1) \sin z(\pi - t_1) \sin zat_1^2 dt_1 + \\
 & + H \sum_{l=2}^{\infty} \left( \frac{1}{z^l} \int_{D_l} Q(T_l) \sin z(\pi - t_1) P(T_l, z) \cos zat_1^2 dT_l + \right. \\
 & \left. + \frac{h}{z^{l+1}} \int_{D_l} Q(T_l) \sin z(\pi - t_1) P(T_l, z) \sin zat_1^2 dT_l \right) + \\
 & + \sum_{l=2}^{\infty} \left( \frac{1}{z^{l-1}} \int_{D_l} Q(T_l) \cos z(\pi - t_1) P(T_l, z) \cos zat_1^2 dT_l + \right. \\
 & \left. + \frac{h}{z^l} \int_{D_l} Q(T_l) \cos z(\pi - t_1) P(T_l, z) \sin zat_1^2 dT_l \right)
 \end{aligned}$$

gdje je  $D_l = D_l(\pi)$ .

Iz posljednje jednakosti primjećujemo da je karakteristična funkcija parna funkcija, te cijela funkcija eksponencijalnog tipa i polovičnog stepena rasta.

### ZAKLJUČAK

U ovom radu pokazan je način konstrukcije karakteristične funkcije Sturm-Liouvilleovog problema sa kašnjenjem oblika  $ax^2$ . Sada se iz ovdje dobijene karakteristične funkcije može odrediti asimptotsko ponašanje svojstvenih vrijednosti operatora Sturm-Liouvillea, koje nam služi prilikom rješavanja obrnutog problema.

### LITERATURA

- Elmir Čatrnja (2011), *Obrnuti problemi sa promjenjivim kašnjenjem na segmentu*, magistarski rad, Pale.
- G. Freiling i V. Yurko (2001), *Inverse Sturm-Liouville problems and their applications*, Nova Science Publishers.
- E. Kreyszig (1978), *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons, New York.
- Rade Lazović (1998), *Konstrukcija operatora tipa Sturm-Liouvillea sa kašnjenjem*, doktorski rad, Beograd.
- B. M. Levitan (1987), *Inverse Sturm-Liouville Problems*, VNU Science Press, Netherland.
- Nikola Mihaljević i Milenko Pikula (2003), *The inverse Sturm-Liouville type problem with changeable delay*, *Mathematica Motishigri*, XVI:31–68.

**CHARACTERISTIC FUNCTION OF STURM-LIOVILLE'S  
PROBLEM WITH A FUCTION OF DELAY  $ax^2$** ***ABSTRACT***

*Sturm-Liouville problem with delay and its inverse problem are very important mathematical areas, both from the theoretical as well as from a practical standpoint, and have extensive application in various natural sciences. There are theoretical results which give necessary conditions and guidelines for solving inverse problems for the various functions of the delay and the various classes of potential functions. The delay is taken to belong to the class of absolutely continuous functions. However, practical solving of inverse problems was impossible. The aim of this work is to prepare the basis for finding a practical solution of this problem, so a function of delay  $ax^2$  is observed and a characteristic function for the Sturm-Liouville problem with delays  $ax^2$  is constructed, which opens the possibility of presenting the delay in the form of polynomials.*

**Keywords:** *Sturm-Liouville's problem, inverse problem, variable delay, characteristic function.*