

dr sc. Amina Šahović
Građevinski fakultet Univeziteta „Džemal Bijedić“ u Mostaru

dr sc. Milenko Pikula
Filozofski fakultet Univerziteta u Istočnom Sarajevu.

mr sc. Sead Peco
Građevinski fakultet Univeziteta „Džemal Bijedić“ u Mostaru

UDK 517.5
519.651

KOSINUSNA OPERATORSKA FUNKCIJA I TEOREME APROKSIMACIJE

SAŽETAK

U ovom radu je data defincija kosinusne operatorske funkcije, njene osobine, te je riješen problem zasićenja za jako neprekidnu kosinusnu operatorsku funkciju.

Ključne riječi: *kosinusna operatorska funkcija, problem zasićenja, teoreme aproksimacije.*

UVOD

Neka je X kompleksan Banachov prostor sa normom $\|\cdot\|$, $\mathcal{B}(X)$ skup svih ograničenih linearnih operatora na X .

Definicija 1.1 *Funkcija $C: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}(X)$ za koju vrijedi:*

- (i) $C(0) = I$, gdje je I identički operator;
- (ii) $C(t + s) + C(t - s) = 2C(t)C(s)$ za svako $t, s \in \mathbb{R}$;

nazivamo kosinusnom operatorskom funkcijom.

Ako pritom vrijedi još i

- (iii) $C(\cdot)x: \mathbb{R} \rightarrow X$ je jako neprekidna za svakog $x \in X$,
onda za $C(t)$ kažemo da je jako neprekidna kosinusna operatorska funkcija.

Infitezimalni generator A kosinusne operatorske funkcije $C(t)$ definisan je sa

$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2}{t^2} [C(t) - I]x$ za samo one $x \in X$ za koje ovaj limes postoji u jakoj topologiji na X . Više o osobinama kosinusne operatorske funkcije može se naći u [9], [10] i [11].

Sljedeća teorema govori o Taylorovoj formuli za kosinusnu operatorsku funkciju C .

Teorema 1.2 (Taylorova formula) *Neka je $C(t)_{t \in \mathbb{R}}$ jako neprekidna kosinusna operatorska funkcija, A njen infinitezimalni generator i $x \in D(A^n)$, $n \in \mathbb{N}$. Tada za $t \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$C(t)x = x + \frac{t^2}{2!}Ax + \dots + \frac{t^{2n-2}}{(2n-2)!}A^{n-1}x + \int_0^t \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}C(s)A^n x ds \quad (1.1)$$

Sada ćemo navesti dva rezultata koji su nam potrebni u ovom radu.

Teorema 1.3 (Mazur) *Neka je $w - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_\infty$ u normiranom prostoru X . Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji konveksna kombinacija $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j$ ($\alpha_j \geq 0, \sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$) x_j -ova tako da vrijedi $\|x_\infty - \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j\| \leq \varepsilon$.*

Teorema 1.4 (Eberlein-Shmulyan) *Banachov prostor X je refleksivan akko je on lokalno sekvencijalno slabo kompaktan, tj. X je refleksivan akko svaki strogo ograničen niz iz X sadrži podniz koji slabo konvergira ka nekom elementu iz X .*

U ovom radu ćemo razmatrati ponašanje operatora

$$T_n(t) = C(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k \quad (\text{gdje je } n \text{ pozitivan cio broj}) \quad (1.2)$$

u okolini tačke $t = 0$. Koristeći Teoremu 1.2, za $x \in D(A^n)$, $t \in \mathbb{R}$, dobijamo

$$T_n(t)x = \int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} C(s)A^n x ds \quad (1.3)$$

Teoreme zasićenja

Znamo da je A^n za svaki $n = 1, 2, \dots$ zatvoren operator sa domenom $D(A^n)$ gustim u X .

Pri tome je A infinitezimalni generator jako neprekidne kosinusne operatorske funkcije $C(t)_{t \in \mathbb{R}}$.

Ako u $D(A^n)$ uvedemo n -normu

$$\|x\|_n = \|x\| + \|Ax\| + \dots + \|A^n x\|,$$

tada je $D_n = \{D(A^n), \|\cdot\|_n\}$ Banachov prostor.

Vrijedi i sljedeća lema.

Lema 2.1 *Ako $y \in D(A^n)$, tada*

$$\|(2n)! t^{-2n} T_n(t)y - A^n y\| = \sigma(1) \quad (t \rightarrow 0).$$

Štaviše, ako $x \in D(A^{n-1})$, $x_k \in D(A^n)$ za $k = 1, 2, \dots$, $\|x_k - x\|_{n-1} \rightarrow 0$ i ako je $\{A^n x_k\}_k$ ograničen niz u X , tada vrijedi

$$\|T_n(t)x\| = \mathcal{O}(t^{2n})(t \rightarrow 0),$$

Definicija 2.2 Završetak od D_n u odnosu na D_{n-1} označen sa $\tilde{D}_n^{D_{n-1}}$ je definisan sa $\tilde{D}_n^{D_{n-1}} = \bigcup_{R>0} \overline{S_n(R)}^{n-1}$, gdje $S_n(R) = \{y \in D_n: \|y\|_n \leq R\}$ i $\overline{S_n(R)}^{n-1}$ predstavlja strogo zatvorenje $S_n(R)$ u odnosu na D_{n-1} .

Koristeći ovu terminologiju, Lemu 2.1 možemo iskazati i ovako: Ako $x \in \tilde{D}_n^{D_{n-1}}$, tada $\|T_n(t)x\| = \mathcal{O}(t^{2n})$. U suprotnom smjeru se dobija da vrijedi:

Lema 2.3 Ako $x \in D(A^{n-1})$ i $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-2n} \|T_n(t)x\| < \infty$, tada $x \in \tilde{D}_n^{D_{n-1}}$.

Posljedica 2.4 Ako $x \in D(A^{n-1})$ i za neki niz $\{t_r\} \rightarrow 0$ vrijedi $(2n)! t_r^{-2n} T_n(t_r)x \xrightarrow{w} y$, tada $x \in D(A^n)$ i $A^n x = y$. (ovdje $\xrightarrow{w} y$ i $\xrightarrow{s} y$ predstavlja slabu, odnosno jaku konvergenciju na X , respektivno).

Dokaz. Lako se pokazuje da vrijedi

$$x(t_r) \in D(A^n), x(t_r) \xrightarrow{s} x \text{ i } A^n x(t_r) = (2n)! t_r^{-2n} T_n(t_r)x.$$

Tada, koristeći Teoremu 1.3 neki niz konveksnih kombinacija elemenata $A^n x(t_r)$ konvergira jako ka y i niz istih konveksnih kombinacija elemenata $x(t_r)$ konvergira jako ka x . Kako je A^n zatvoren, to vrijedi data tvrdnja.

Posljedica 2.5 Ako $x \in D(A^{n-1})$ i $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-2n} \|T_n(t)x\| = 0$, tada je $T_n(t)x = 0$ za svako $t \in \mathbf{R}$.

Dokaz. Na osnovu Posljedice 2.4 imamo da $A^n x = 0$. Sada, koristeći Taylorovu formulu, lahko dobijamo da je $T_n(t)x = 0$, što smo i trebali dokazati.

Sada ćemo dati definiciju zasićenja.

Definicija 2.6 Neka je X Banachov prostor, a Y linearan podprostor od X i $T(t)$ ($t > 0$) familija linearnih operatora sa Y u X . Pretpostavimo da postoji pozitivan broj r takav da za sve $y \in Y$ relacija $\|T(t)\| = \sigma(t^r)$ ($t \rightarrow 0_+$) daje $T(t)y = 0$ za svako $t > 0$, dok $\mathcal{F}\{T(t); Y, X\} = \{y \in Y: \|T(t)y\| = \mathcal{O}(t^r)(t \rightarrow 0_+)\}$ sadrži sam oone y tako da je $T(t)y \neq 0$ za svako $t > 0$. Tada kažemo da je polugrupa $\{T(t); t > 0\}$ zasićena u (Y, X) sa redom $\mathcal{O}(t^r)$ i $\mathcal{F}\{T(t); Y, X\}$ je njena Favard klasa.

Teorema 2.7 Pretpostavimo da je $C(t)_{t \in \mathbf{R}}$ kosinusna operatorska funkcija i

$$T_n(t) = C(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k$$

nije identički jednak $0 \in \mathcal{B}(X)$ za svako $t > 0$. Tada $\{T_n(t)\}$ je zasićena u $u(D(A^{n-1}), X)$ sa redom $\mathcal{O}(t^{2n})$ i Favard klasa je $\tilde{D}_n^{D_{n-1}}$.

Dokaz. Na osnovu Leme 2.1, Leme 2.3 i Posljedice 2.5 mi trebamo još samo pokazati da $\tilde{D}_n^{D_{n-1}}$ sadrži element y takav da vrijedi $T_n(t)y \neq 0$ za svako $t > 0$. Da bismo ovo pokazali, pretpostavit ćemo suprotno, tj. da za svako $y \in D_n$ i svako $t > 0$ vrijedi $T_n(t)y = 0$. Na osnovu ove pretpostavke dobijamo da vrijedi

$$A^n y = C^{(2n)}(0)y = T_n^{(2n)}(0)y = 0.$$

Odavde dobijamo da je $A^n = 0 \in \mathcal{B}(X)$, jer znamo da je A^n zaztvoren operator, čiji je domen gust u X . Koristeći sada Taylorovu teoremu, dobijamo $T_n(t)y = 0 \in \mathcal{B}(X)$ za svako $t > 0$, što je kontradikcija sa pretpostavkom teoreme da je $T_n(t) \neq 0$, čime je teorema dokazana.

Posljedica 2.8 *Pretpostavimo da je $C(t)$ kosinusna operatorska funkcija i*

$$T_n(t) = C(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k$$

nije identički jednak $0 \in \mathcal{B}(X)$ za svako $t > 0$ i neka je X refleksivan Banachov prostor. Tada je

$$\mathcal{F}\{T_n(t); D(A^{n-1}), X\} = D_n.$$

Dokaz. Kako su ispunjeni uslovi Teoreme 2.7, tada $x \in \tilde{D}_n^{D_{n-1}}$ akko je funkcija $t^{-2n}T_n(t)x$ ograničena u okolini tačke $t = 0$. Sada prema Teoremi 1.4 za neki niz $\{t_r\} \rightarrow 0$ vrijedi

$t_r^{-2n}T_n(t_r)x \xrightarrow{w} y$. Koristeći Posljedicu 2.4, dobijamo da $x \in D(A^n)$. Sada Teorema 2.11 daje datu tvrdnju.

Mi ćemo posmatrati ponašanje zasićenja operatora

$$S_n^*(t) = C(t)^* - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^{*k} \quad (t \in \mathbb{R})$$

na $D(A^{*n-1})$, gdje je n pozitivan cio broj. Napomenimo da familija dualnih operatora $\{C(t)^*; t \in \mathbb{R}\}$ nije u pravilu jako neprekidna na X^* . Mi ćemo ga zvati konjugirana funkcija u odnosu na $C(t)$.

Lema 2.9 *Ako je A infinitesimalni generator kosinusne operatorske funkcije $C(t)$, tada vrijedi*

$$A^{*k} = A^{k*} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Lema 2.10 *Neka $x^* \in D(A^{*n-1})$, tada vrijede sljedeće izjave:*

- Ako $x^* \in D(A^{*n})$, tada $\|S_n^*(t)x^*\| = \mathcal{O}(t^{2n})$ kad $(t \rightarrow 0)$.*
- Ako $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-2n} \|S_n^*(t)x^*\| < \infty$, tada $x^* \in D(A^{n*})$,*
- Ako $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-2n} \|S_n^*(t)x^*\| = 0$, tada $S_n^*(t)x^* = 0^*$ za $t \in \mathbb{R}$.*

Dokaz. a) Pretpostavimo da $x^* \in D(A^{*n})$, odnosno $x \in D(A^n)$. Tada vrijedi

$$(S_n^*(t)x^*, x) = \left\{ \left[C(t)^* - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^{*k} \right] x^*, x \right\} =$$

$$\begin{aligned} \left\{ x^*, \left[C(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k \right] x \right\} &= \left[x^*, A^n \int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} C(s) x ds \right] = \\ &= \left[A^{n*} x^*, \int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} C(s) x ds \right] \end{aligned}$$

Kako je $D(A^n)$ zatvoren u X , dobijamo da za svako $x \in X$ vrijedi:

$$(S_n^*(t)x^*, x) = \left[A^{n*} x^*, \int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} C(s) x ds \right].$$

Dakle, za $0 < |t| \leq 1$ dobijamo:

$$t^{-2n} \|S_n^*(t)x^*\| \leq \|A^{n*} x^*\| \cdot (2n)!^{-1} \sup_{0 \leq |t| \leq 1} \|C(s)\| < \infty,$$

odakle slijedi i naša tvrdnja.

b) Pretpostavimo da je $\{t_j\}$ niz realnih brojeva koji konvergira ka 0 i takav da vrijedi $t_j^{-2n} \|S_n^*(t_j)x^*\| \leq K < \infty$ za svako t_j .

Definišimo sada $H_r = \{(2n)!^{-1} t_j^{-2n} S_n^*(t_j)x^* : j \geq r\}$ za $r = 1, 2, \dots$ i neka je G_r w^* -zatvorenje u odnosu na H_r u X^* . Odavde slijedi da je G_r strogo ograničen i po Alaougljovoj teoremi kompaktan u w^* -topologiji na X^* . Niz G_r je opadajući i ima osobinu konačnog presjeka, dakle, postoji $y^* \in \bigcap_{r=1}^{\infty} G_r$.

Neka sada $x \in D(A^n)$. Tada prema Lemi 2.1 vrijedi:

$$A^n x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(2n)!}{t^{2n}} \left[C(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k \right] x \quad (2.1)$$

S druge strane, $y^* x \in \bigcap_{r=1}^{\infty} G_r x \subset \bigcap_{r=1}^{\infty} \overline{H_r x}$, što znači da postoji podniz $\{t_{j_m}\}$ niza $\{t_j\}$ sa osobinom $t_{j_m} = t_{j_m}(x) \rightarrow 0$ kad $(m \rightarrow \infty)$ i takav da vrijedi

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left((2n)!^{-1} t_{j_m}^{-2n} S_n^*(t_{j_m}) x^*, x \right) = (y^*, x)$$

Kako je $x^* \in D(A^{k*}), (k = 0, 1, \dots, n-1)$, dobijamo da vrijedi:

$$\begin{aligned} (x^*, A^n x) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ x^*, (2n)!^{-1} t_{j_m}^{-2n} \left[C(t_{j_m}) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t_{j_m}^{2k}}{(2k)!} A^k \right] x \right\} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left((2n)!^{-1} t_{j_m}^{-2n} S_n^*(t_{j_m}) x^*, x \right) = (y^*, x) \end{aligned}$$

odakle slijedi da $x^* \in D(A^{n*})$.

c) Ako je pretpostavka ispunjena, tada, koristeći dokazanu tvrdnju pod b), dobijamo da $x^* \in D(A^{n*})$, a odavde po Lemi 2.9 vrijedi $x^* \in D(A^{*n})$. Ako $C_0^*(t) (t \in \mathbb{R})$ označava kosinusnu operatorsku funkciju pridruženu $C(t)$, i A_0^* njen generator, tada iz [6] i Leme 2.9 dobijamo da vrijedi $x^* \in D(A_0^{*n-1})$ i

$$S_n^*(t)x^* = \left[C_0^*(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A_0^{*k} \right] x^* \text{ za } t \in \mathbb{R}.$$

To znači da su ispunjeni uslovi Posljedice 2.5 i time je dokaz završen.

Teorema 2.11 *Ako je $C(t)$ kosinusna operatorska funkcija, tada su sljedeći uslovi ekvivalentni:*

- a) $T_n(t)x = 0$ za svako $x \in D(A^{n-1}), t \in \mathbb{R}$,
 b) $A \in \mathcal{B}(X), A^n = 0$ i $\left[C(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k \right]$ za svako $t \in \mathbb{R}$,
 c) $S_n^*(t)x^* = 0^*$ za svako $x^* \in D(A^{*n-1}), t \in \mathbb{R}$.

Štaviše, ako nijedan od ovih uslova ne vrijedi, tada je $\{S_n^(t)\}$ zasićen u $(D(A^{*n-1}), X^*)$ sa redom $\mathcal{O}(t^{2n})$ i Favard klasa je $D(A^{*n})$.*

Dokaz. Ako je ispunjen uslov a), tada iz jednakosti (2.1) slijedi da je $A^n x = 0$ za $x \in D(A^n)$. Kako je A^n gusto definiran i zatvoren, to dobijamo da je $A^n = 0 \in \mathcal{B}(X)$, što znači da je ispunjen uslov b). Ako vrijedi uslov b), tada dobijamo da je $S_n^*(t) = T(t)^* = 0^* \in \mathcal{B}(X^*)$, odakle slijedi da je ispunjen uslov c). Ostaje još pokazati da iz uslova c) slijedi ispunjenost uslova a). Neka vrijedi uslov c). Tada vrijedi:

$$(x^*, T_n(t)x) = (S_n^*(t)x^*, x) = 0 \text{ za } x^* \in D(A^{*n-1}), x \in D(A^{n-1}), t \in \mathbb{R}.$$

S druge strane, koristeći Lemu 2.9 dobijamo da za svaki pozitivan cio broj k skup $D(A^{*k})$ je w^* gust u X^* , odakle dobijamo da je ispunjen uslov a). Što se tiče problema zasićenja, s obzirom na Lemu 2.10, mi još trebamo dokazati da postoji $y^* \in D(A^{*n})$ tako da je $S_n^*(t)y^* \neq 0^*$ za neko $t > 0$. Pretpostavimo da ovo nije tačno. Tada bismo imali $(y^*, T_n(t)x) = 0$ za $y^* \in D(A^{*n}), x \in D(A^{n-1}), t \in \mathbb{R}$. Odavde slijedi da je ispunjen uslov a), što je kontradikcija s obzirom na pretpostavku.

LITERATURA

- H. Berens (1968), *Interpolationsmethoden zur Behandlung von approximationsprozessen auf Banachraumen*, Lecture Notes, Springer.
- P.L. Butzer-H.Berens (1967), *Semi-groups of operators and approximation*, Springer.
- H.O.Fattorini (1968), *Ordinary differential equations in linear topological spaces*, I, J.Diff.Equ., 5, 72-105.
- E. Hille- R.S, Phillips (1957), *Functional analysis and semi-groups*, Amer.Math. Soc. Coll. Publ.,
- K. De Leeuw (1960), *On the adjoint semi group and some problems in the theory of approximation*, Math. Z., 73, , 219-234.
- B. Nagy (1974), *On cosine operator functions in Banach spaces*, Acta Sci. Math. Szeged, 36 281-289.
- M. Sova (1966), *Cosine operator functions*, Rozprawy Mat. XLIX (Warszawa,).
- K. Yosida (1974), *Functional analysis*, 4th ed., Springer,.
- Amina Šahović i Fikret Vajzović (2005), *Cosine Operator Functions and Hilbert Transforms*. NSJOM, 35,41-55.

- Amina Šahović i Fikret Vajzović (2008), *A Spectrality Condition for Infinitesimal Generators of Cosine Operator Functions*. Matematički vesnik, 60, 193-206.
- Fikret Vajzović i Amina Šahović (2005), *Cosine Operator Functions and Hilbert Transforms II*. Proc. III congress of mathematicians of Macedonia, Struga, Macedonia, 60, 347-356.

COSINE OPERATOR FUNCTION AND APPROXIMATION THEOREMS

ABSTRACT

This paper presents definition of cosine operator function, its properties, and has solved the problem of saturation for strong continuous cosine operator function.

Keywords: *cosine operator function, problem of saturation, approximation theorems*