KARAKTERISTIČNA FUNKCIJA JEDNAČINE STURM-LIOUVILLEA SA PRETICANJEM UZ RAZDVOJENE GRANIČNE USLOVE

Elmir Čatrnja*✉

Sažetak

U posljednje vrijeme došlo je do velikog napretka u teoriji direktnog i obrnutog problema tipa Sturm-Liouvillea sa raznim vrstama kašnjenja. U ovom radu ćemo posmatrati konstantno preticanje, te definisati diferencijalnu jednačinu tipa Sturm-Liouvillea sa konstantnim preticanjem pri razdvojenim graničnim uslovima. Pri tome ćemo konstruisati rješenje takve jednačine, te formirati njenu karakterističnu funkciju.

Ključne riječi: *Sturm-Liouvilleov problem, karakteristična funkcija, svojstvene vrijednosti, razdvojeni granični uslovi*

UVOD

Na segmentu $[0, \pi]$ posmatrat ćemo Sturm-Liovilleovu jednačinu sa konstantnim preticanjem:

$$-y''(x) + q(x)y(x+\tau) = \lambda y(x), \tag{1}$$

pri čemu ćemo za potencijal $q(x)$ uzimati realnu funkciju iz $L_2[0, \pi]$ prostora. Za preticanje $\tau \in \mathbb{R}$ ćemo uzeti da vrijedi $\frac{\pi}{4} \leq \tau < \frac{\pi}{3}$.

Ovu jednačinu posmatrat ćemo uz mješovite granične uslove

$$y(x) \equiv 0, \text{ za } x \in [\pi, \pi + \tau] \tag{2}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0. \tag{3}$$

Napomenimo da interes za diferencijalne jednačine sa pomjerenim argumentom vlada već dugi niz godina te da se određeni broj rezultata može naći već i u radovima iz prošlog vijeka (Èl'sgol'ts, 1966; Pikula,1991; Norkin, 1972; Zverkin,

* Nastavnički fakultet Univerziteta „Džemal Bijedić“ u Mostaru
✉ e-mail: elmir.catrnja@unmo.ba

A. M. et al., 1966). Međutim, do velikog pomaka u teoriji diferencijalnih jednačina tipa Sturm-Liouvillea dolazi u posljednjih nekoliko godina (Freiling i Yurko, 2012; Pikula,1991; Pikula i Marjanović, 1996; Pikula i Marjanović, 1999). Napomenuli bismo, da svi ovi rezultati svoje početke nalaze u teoriji običnih diferencijalnih jednačina, o čemu govore Myshkis i Èl'sgol'ts (1967) te Freiling i Yurko (2001).

Rješenje jednačine

U ovom poglavlju konstruisat ćemo rješenje jednačine (1). U tu svrhu dokazat ćemo sljedeću teoremu.

Teorema 1. *Jednačina Sturm-Liouvillea sa preticanjem* (1) *zajedno sa graničnim uslovom* $y(x) = 0,\ x \in [\pi, \pi + \tau]$ *je ekvivalentna integralnoj jednačini Volterrinog tipa*

$$y(x) = \sin z(\pi - x) - \frac{1}{z} \int_x^{\pi} q(t) \sin z(x - t) y(t + \tau) dt, \tag{4}$$

Dokaz. Dokaz ćemo izvršiti metodom varijacije konstante. Napišimo jednačinu (1) u obliku:

$$y''(x) + \lambda y(x) = q(x) y(x + \tau). \tag{5}$$

Rješenje pripadajuće homogene jednačine

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0$$

tražimo u obliku $y = e^{kx}$, odakle dobijamo karakterističnu jednačinu

$$-k^2 - \lambda = 0$$

čija su rješenja $k_1 = -\sqrt{\lambda}$ i $k_2 = \sqrt{\lambda}$ ili nakon što uvedemo smjenu $\lambda = z^2$

$$k_1 = -iz,\ k_2 = iz,$$

sada je rješenje pripadajuće homogene jednačine:

$$y = C_1 e^{izx} + C_2 e^{-izx}.$$

Opće rješenje određujemo metodom varijacije konstante. Sada, smatrajući da su C_1 i C_2 funkcije po promjenjivoj x, diferenciranjem dobijamo

$$y'(x) = C_1'(x)e^{izx} + izC_1(x)e^{izx} + C_2'(x)e^{-izx} - izC_2(x)e^{-izx}.$$

Stavimo da je

$$C_1'(x)e^{izx} + C_2'(x)e^{-izx} = 0$$

i nađimo $y''(x)$, imamo

$$y''(x) = C_1'(x)ize^{izx} - C_1(x)z^2e^{izx} - C_2'(x)ize^{-izx} - C_2(x)z^2e^{-izx}.$$

Uvrštavajući u jednačinu (5) dobijamo:

$$-C_1'(x)ize^{izx} + izC_2'(x)e^{-izx} = q(x)y(x+\tau).$$

Riješimo sistem:

$$\begin{aligned} C_1'(x)e^{izx} + C_2'(x)e^{-izx} &= 0 \\ -C_1'(x)ize^{izx} + izC_2'(x)e^{-izx} &= q(x)y(x+\tau). \end{aligned}$$

Imamo:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} e^{izx} & e^{-izx} \\ -ize^{izx} & ize^{-izx} \end{vmatrix} = 2iz, \\ D_{C_1'} &= \begin{vmatrix} 0 & e^{-izx} \\ q(x)y(x+\tau) & ize^{-izx} \end{vmatrix} = -q(x)e^{-izx}y(x+\tau), \\ D_{C_2'} &= \begin{vmatrix} e^{izx} & 0 \\ -ize^{izx} & q(x)y(x+\tau) \end{vmatrix} = q(x)e^{izx}y(x+\tau). \end{aligned}$$

Sada je:

$$C_1'(x) = \frac{-q(x)e^{-izx}y(x+\tau)}{2iz},$$

pa je

$$C_1(x) = C_1 + \frac{1}{2iz}\int_x^{\pi} q(t)e^{-izt}y(t+\tau)dt.$$

Također je

$$C_2'(x) = \frac{q(x)e^{izx}y(x+\tau)}{2iz},$$

odnosno

$$C_2(x) = C_2 - \frac{1}{2iz}\int_x^\pi q(t)e^{izt}y(t+\tau)dt.$$

Dakle, rješenje jednačine je

$$y = \left(C_1 + \frac{1}{2iz}\int_x^\pi q(t)e^{-izt}y(t+\tau)dt\right)e^{izx} + \left(C_2 - \frac{1}{2iz}\int_x^\pi q(t)e^{izt}y(t+\tau)dt.\right)e^{-izx}$$

Pošto je $y(\pi) = 0$ (iz (2)), to je

$$C_1e^{iz\pi} + C_2e^{-iz\pi} = 0,$$

tj.

$$C_2 = -C_1e^{2iz\pi}.$$

Sada je

$$y = C_1\left(e^{-izt} - e^{izt}e^{2iz\pi}\right) + \frac{1}{2iz}\left(\int_x^\pi q(t)e^{-izt+izx}y(t+\tau)dt - \int_x^\pi q(t)e^{izt-izx}y(t+\tau)dt\right).$$

Koristeći identitet

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

konačno, uzimajući da je $C_1 = 1$, dobijamo

$$y(x) = \sin z(\pi - x) - \frac{1}{z}\int_x^\pi q(t)\sin z(x-t)y(t+\tau)dt.$$

Kreyszig (1978) je pokazao da Volterrina jednačina ima jedinstveno rješenje.

Da vrijedi i obrnuto, tj. da je dobijena integralna jednačina rješenje Sturm-Liouvilleove jednačine pokazuje se jednostavnim uvrštavanjem dobijenog rješenja u početnu diferencijalnu jednačinu.

Zaista, diferencirajući izraz dat sa (4) dva puta dobijamo

$$y(x) = \sin z(\pi - x) - \frac{1}{z}\int_x^\pi q(t)\sin zx\cos zt\; y(t+\tau)dt +$$

$$+\frac{1}{z}\int\limits_{x}^{\pi} q(t)\cos zx \sin zt\ y(t+\tau)dt.$$

$$y(x)=\sin z(\pi-x)-\sin zx\ \frac{1}{z}\int\limits_{x}^{\pi} q(t)\cos zt\ y(t+\tau)dt+$$
$$+\cos zx\ \frac{1}{z}\int\limits_{x}^{\pi} q(t)\sin zt\ y(t+\tau)dt.$$

$$y'(x)=-z\cos z(\pi-x)-$$
$$-\frac{1}{z}\sin zxq(x)\cos zxy(x+\tau,z)-\frac{1}{z}z\cos zx\int\limits_{x}^{\pi} q(t)\cos zt\ y(t+\tau)dt+$$
$$+\frac{1}{z}\cos zx\ q(x)\sin zx\ y(x+\tau,z)-\frac{1}{z}z\sin zx\int\limits_{x}^{\pi} q(t)\cos zty(t+\tau)dt,$$

tj.

$$y'(x)=-z\cos z(\pi-x)-$$
$$-\cos zx\int\limits_{x}^{\pi} q(t)\cos zty(t+\tau)dt-$$
$$-\sin zx\int\limits_{x}^{\pi} q(t)\sin zty(t+\tau)dt.$$

Sada je

$$y''(x)=-z^2\sin z(\pi-x)-$$
$$+z\sin zx\int\limits_{x}^{\pi} q(t)\cos zty(t+\tau)dt-\cos zxq(x)\cos zxy(x+\tau)-$$
$$-z\cos zx\int\limits_{x}^{\pi} q(t)\sin zty(t+\tau)dt-\sin zxq(x)\sin zxy(x+\tau)=$$

$$= -z^2 \sin z(\pi - x) - q(x)y(x+\tau) +$$

$$+ z \sin zx \int_x^\pi q(t) \cos zty(t+\tau)dt -$$

$$- z \cos zx \int_x^\pi q(t) \sin zty(t+\tau)dt =$$

$$= -z^2 \sin z(\pi - x) - q(x)y(x+\tau) + z \int_x^\pi q(t) \sin z(x-t)y(t+\tau)dt.$$

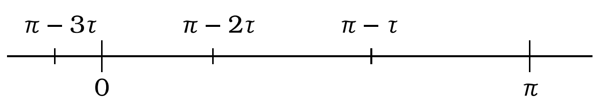
Uvrštavajući u (1) dobijamo identitet, čime smo dokazali i obrat.

□

Primijetimo da funkcija data sa (4) zavisi ne samo od x nego i od z, pa smo strogo gledano trebali pisati $y(x, z)$. Međutim, zbog jednostavnijeg zapisivanja izostavljat ćemo promjenjivu z kad god je to moguće i gdje ne utječe na razmatranje.

Nađimo rješenje jednačine (4) koristeći se metodom koraka, koju je Vladičić (2013) koristio za slučaj konstantnog kašnjenja uz Dirichletove granične uslove.

Pošto je $\tau \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ možemo naći $k_0 \in \mathbb{N}$ takvo da je $k_0\tau < \pi \leq (k_0+1)\tau$, preciznije $k_0 = 3$. Izvršimo podjelu segmenta $[0, \pi]$ kao što je prikazano



Posmatrajmo sada sljedeće slučajeve,

1. $x \in [\pi - \tau, \pi]$. Prema postavci problema je $y(x) \equiv 0$ za $x \in [\pi, \pi + \tau]$, pa je $y(x+\tau) \equiv 0$, za $x \in [\pi - \tau, \pi]$. Sada je integral u jednačini (4) dobijene u prethodnoj teoremi jednak nuli, pa je

$$y(x) = \sin z(\pi - x) - \frac{1}{z} \int_x^\pi q(t) \sin z(x-t)y(t+\tau)dt.$$

$$= \sin z(\pi - x)$$

2. $x \in [\pi - 2\tau, \pi - \tau)$.

$$\begin{aligned} y(x) &= \sin z(\pi - x) - \frac{1}{z}\int_x^{\pi} q(t)\sin z(x-t)y(t+\tau)dt = \\ &= \sin z(\pi - x) - \frac{1}{z}\int_x^{\pi-\tau} q(t)\sin z(x-t)y(t+\tau)dt - \\ &- \frac{1}{z}\int_{\pi-\tau}^{\pi} q(t)\sin z(x-t)y(t+\tau)dt \end{aligned}$$

Kao i u prethodom koraku drugi integral je jednak nuli, a u prvom integralu iskoristit ćemo rezultat prvog koraka, pa imamo:

$$y(x) = \sin z(\pi - x) - \frac{1}{z}\int_x^{\pi-\tau} q(t)\sin z(x-t)\sin z(\pi - t - \tau)dt.$$

3. $x \in [\pi - 3\tau, \pi - 2\tau)$.

$$\begin{aligned} y(x) &= \sin z(\pi - x) - \frac{1}{z}\int_x^{\pi} q(t)\sin z(x-t)y(t+\tau)dt = \\ &= \sin z(\pi - x) - \frac{1}{z}\int_x^{\pi-2\tau} q(t)\sin z(x-t)y(t+\tau)dt - \\ &- \frac{1}{z}\int_{\pi-2\tau}^{\pi-\tau} q(t)\sin z(x-t)y(t+\tau)dt - \\ &- \frac{1}{z}\int_{\pi-\tau}^{\pi} q(t)\sin z(x-t)y(t+\tau)dt. \end{aligned}$$

Zadnji integral je kao i dosada jednak nuli. Posmatrajmo prvi integral. Kako t ide skupom $[x, \pi - 2\tau]$, to $t + \tau$ ide skupom $[x + \tau, \pi - \tau]$. Dakle, u izrazu $y(t+\tau)$ promjenjiva ide skupom $(\pi-2\tau, \pi-\tau]$, pa možemo iskoristiti rezultat drugog koraka. Dobijamo:

$$\frac{1}{z}\int\limits_{x}^{\pi-2\tau} q(t)\sin z(x-t)y(t+\tau)dt =$$

$$= \frac{1}{z}\int\limits_{x}^{\pi-2\tau} q(t)\sin z(x-t)\Bigg(C_1 \sin z(\pi - t - \tau) -$$

$$- \frac{C_1}{z}\int\limits_{t+\tau}^{\pi-\tau} q(t_1)\sin z(t+\tau-t_1)\sin z(\pi - t_1\tau)dt_1\Bigg)dt =$$

$$= \frac{C_1}{z}\int\limits_{x}^{\pi-2\tau} q(t)\sin z(\pi-t-\tau)\sin z(x-t)dt -$$

$$- \frac{C_1}{z^2}\int\limits_{x}^{\pi-2\tau}\int\limits_{t+\tau}^{\pi-\tau} q(t)q(t_1)\sin z(t+\tau-t_1)\sin z(\pi-t_1-\tau)\sin z(x-t)dt_1\,dt$$

U drugom integralu kako t ide skupom $[\pi - 2\tau, \pi - \tau]$, $t+\tau$ ide skupom $[\pi - \tau, \pi]$. Dakle, u izrazu $y(t+\tau)$ promjenjiva ide skupom $[\pi - \tau, \pi]$, pa možemo iskoristiti rezultat prvog koraka i dobijamo:

$$\frac{1}{z}\int\limits_{\pi-2\tau}^{\pi-\tau} q(t)\sin z(x-t)y(t+\tau)dt = C_1\int\limits_{\pi-2\tau}^{\pi-\tau} q(t)\sin z(x-t)\cos z(\pi-t-\tau)dt +$$

$$+ \frac{C_1}{z}\int\limits_{\pi-2\tau}^{\pi-\tau} q(t)\sin z(x-t)\sin z(\pi-t-\tau)dt.$$

Sada je

$$y(x) = \sin z(\pi - x) + \frac{1}{z}\int\limits_{\pi-2\tau}^{\pi-\tau} q(t)\sin z(x-t)\sin z(\pi-t-\tau)dt.$$

$$- \frac{1}{z^2}\int\limits_{x}^{\pi-2\tau}\int\limits_{t+\tau}^{\pi-\tau} q(t)q(t_1)\sin z(t+\tau-t_1)\sin z(\pi-t_1-\tau)\sin z(x-t)dt_1\,dt$$

Sada je posljednjim izrazom dato rješenje jednačine na cijelom segmentu $[0, \pi]$.

Primijetimo, također, da je gornje rješenje moguće napisati u obliku

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x),$$

pri čemu je

$$y_0(x) = \sin z(\pi - x), \quad x \leq \pi,$$

a $y_k(x)$, $k \in \{1, 2\}$ su dati rekurzivno izrazom

$$y_k(x) = \begin{cases} \frac{-1}{z} \int\limits_x^{\pi - k\tau} \sin z(x-t) q(t) y_{k-1}(t+\tau)\, dt, & x \leq \pi - k\tau \\ 0, & x > \pi - k\tau \end{cases}$$

Karakteristična funkcija

Navedimo prvo dvije definicije i teoremu koja daje vezu između njih.

Definicija 1. *Sa L_τ označimo operator definisan sa (1), (2) i (3), tj. operator*

$$L_\tau(y(x)) := -y''(x) + q(x)y(x+\tau).$$

Definicija 2. *Ako je skup svojstvenih vrijednosti operatora L_τ identičan skupu nula funkcije F, tada funkciju F zovemo karakteristična funkcija operatora L_τ.*

Teorem 2. $\lambda = z^2$ *je svojstvena vrijednost operatora L_τ ako i samo ako je* $F(z) = 0$.

Odredimo sada karakterističnu funkciju operatora L_τ.

Rješenja jednačine (1) pored uslova $y(x) = 0$, $x \in [\pi, \pi + \tau]$ trebaju zadovoljavati i uslov (3). Pošto je:

$$y'(x) = -z \cos z(\pi - x) + \int\limits_{\pi - 2\tau}^{\pi - \tau} q(t) \cos z(x-t) \sin z(\pi - t - \tau) dt -$$

$$-\frac{1}{z}\int\limits_{x}^{\pi-2\tau}\int\limits_{t+\tau}^{\pi-\tau} q(t)q(t_1)\sin z(t+\tau-t_1)\sin z(\pi-t_1-\tau)\cos z(x-t)dt_1dt$$

imamo da je:

$$y(0)=\sin z(\pi-0)+\frac{1}{z}\int\limits_{\pi-2\tau}^{\pi-\tau} q(t)\sin z(0-t)\sin z(\pi-t-\tau)dt-$$

$$-\frac{1}{z^2}\int\limits_{0}^{\pi-2\tau}\int\limits_{t+\tau}^{\pi-\tau} q(t)q(t_1)\sin z(t+\tau-t_1)\sin z(\pi-t_1-\tau)\sin z(0-t)dt_1dt=$$

$$=\sin z\pi-\frac{1}{z}\int\limits_{\pi-2\tau}^{\pi-\tau} q(t)\sin zt\sin z(\pi-t-\tau)dt+$$

$$+\frac{1}{z^2}\int\limits_{0}^{\pi-2\tau}\int\limits_{t+\tau}^{\pi-\tau} q(t)q(t_1)\sin z(t+\tau-t_1)\sin z(\pi-t_1-\tau)\sin zt dt_1dt$$

i

$$y'(0)=-z\cos z\pi+\int\limits_{\pi-2\tau}^{\pi-\tau} q(t)\cos zt\sin z(\pi-t-\tau)dt-$$

$$-\frac{1}{z}\int\limits_{0}^{\pi-2\tau}\int\limits_{t+\tau}^{\pi-\tau} q(t)q(t_1)\sin z(t+\tau-t_1)\sin z(\pi-t_1-\tau)\cos zt dt_1dt$$

Uvrštavajući u (3) dobijamo jednakost:

$$-z\cos z\pi+\int\limits_{\pi-2\tau}^{\pi-\tau} q(t)\cos zt\sin z(\pi-t-\tau)dt-$$

$$-\frac{1}{z}\int\limits_{0}^{\pi-2\tau}\int\limits_{t+\tau}^{\pi-\tau} q(t)q(t_1)\sin z(t+\tau-t_1)\sin z(\pi-t_1-\tau)\cos zt dt_1dt=$$

$$=h\Bigg(\sin z\pi-\frac{1}{z}\int\limits_{\pi-2\tau}^{\pi-\tau} q(t)\sin zt\sin z(\pi-t-\tau)dt+$$

$$+\frac{1}{z^2}\int\limits_0^{\pi-2\tau}\int\limits_{t+\tau}^{\pi-\tau} q(t)q(t_1)\sin z(t+\tau-t_1)\sin z(\pi-t_1-\tau)\sin zt dt_1 dt\Bigg)$$

Sređivajući gornji izraz i dijeleći ga sa z zaključujemo da je funkcija

$$F(z)=\cos z\pi+\frac{h}{z}\sin z\pi+\frac{1}{z}\int\limits_0^{\pi-\tau} q(t)\sin zt\sin z(\pi-t-\tau)dt+$$
$$+\frac{h}{z^2}\int\limits_0^{\pi-\tau} q(t)\cos zt\sin z(\pi-t-\tau)dt-$$
$$-\frac{1}{z^2}\int\limits_0^{\pi-2\tau}\int\limits_{t+\tau}^{\pi-\tau} q(t)q(t_1)\sin zt\sin z(t+\tau-t_1)\sin z(\pi-t_1-\tau)dt\,dt_1+$$
$$+\frac{h}{z^3}\int\limits_0^{\pi-2\tau}\int\limits_{t+\tau}^{\pi-\tau} q(t)q(t_1)\cos zt\sin z(t+\tau-t_1)\sin z(\pi-t_1-\tau)dt\,dt_1$$

karakteristična funkcija operatora L_τ.

ZAKLJUČAK

U ovom radu smo konstruisali rješenje Sturm-Liouvilleove jednačine sa konstantnim preticanjem te izveli karakterističnu funkciju operatora L_τ uz razdvojene granične uslove. Ova karakteristična funkcija će nam u daljem radu koristiti za analizu direktnog problema i asimptotike svojstvenih vrijednosti operatora L_τ, i biti važna formula za rješavanje obrnutog problema.

LITERATURA

Čatrnja, E. i Pikula, M. (2015). Asismptotika svojstvenih vrijednosti Sturm-Liouvilleovog problema sa konstantim preticanjem. U: M. Pikula (ur.), *Proceedings of the IVth mathematical conferenece of Republic of Srpska*. Trebinje: University of East Sarajevo, Mathematical Society of the Republic of Srpska.

Èl'sgol'ts, L. È. (1966). *Introduction to the theory of differential equations with deviating arguments* (R. J. McLaughlin, Prev.). San Francisco, Calif.-London-Amsterdam: Holden-Day, Inc.

Freiling, G. i Yurko, V. (2001). *Inverse Sturm-Liouville problems and their applications*. New York: NOVA Science Publishers.

Freiling, G. i Yurko, V. (2012). Inverse problems for Sturm-Liouville differential operators with a constant delay. *Applied Mathematics letters, 25* (11), 1999–2004.

Kreyszig E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley and Sons.

Myshkis, A. D. i Èl'sgol'ts, L. È. (1967). Some results and problems in the theory of differential equations. *Russian Mathematical Surveys 22* (2), 19–57.

Norkin, S. B. (1972). *Differential Equations of the Second Order with Retarded Argument*. Providence: American Mathematical Society.

Pikula, M. (1991). Određivanje diferencijalnog operatora Šturm-Liuvilla s kašnjenjem na osnovu dva spektra. *Matematički vesnik 34*, 159–171.

Pikula, M. (1996). Ob opredelenii differentsial'nogo uravneniya s peremennym zapazdyvaniem. *Mathematica Montisnigri, VI*, 71–91.

Pikula, M. i Marjanović, T. (1999). The regulation independent of the potential simmetrical to center $[\tau, \pi]$ for Sturm-Liouville operator with a constant delay. *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics 14*, 21–29.

Pikula, M. i Marjanović, T. (1996). The construction of the small potential for an equation of Sturm-Liouville type with constant delay. U: Lj. Kočinac (ur.) Proceedings of the 2nd mathematics conference in Priština, Priština 1996, str. 135–141. Priština: University of Priština.

Vladičić, V. (2013). *Primjena Fourijevih redova u inverznom problemu jednačina sa kašnjenjem (Doktorska disertacija)*. Filozoski fakultet Pale, Univerzitet u Istočnom Sarajevu.

Zverkin, A. M., Kamenskii, G. A., Norkin, S. B. i Èl'sgol'c, L. È. (1962). Differential equations with deviating argument. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk 17*, 2 (104), 77–164.

Characteritic function of the equation Sturm-Liouville with overtaking with separated boundary conditions

Abstract

Lately, there has been a great progress in the theory of differential equations of Sturm-Liouville type with different delays. In this paper, we will observe overtaking and define the differential equation of Sturm-Liouville type with constant overtaking with separated boundary conditions. In doing so, we will construct a solution of such equations and form its characteristic function.

Key words: *Sturm-Liouvilleov problem, characteristic function, eigenvalues, separated boundary conditions*