

## Tri dokaza Heronove formule

Anes Z. Hadžiomerović

**SAŽETAK:** Izračunavanje površina neke figure jedan je od važnih zadataka s kojim se često susrećemo. Ako je figuru moguće rastaviti na trouglove, tada se površina figure dobije kao zbir površina trouglova. U tom slučaju koristimo Heronovu formulu.

Ovaj članak sadrži jedan od izuzetno zanimljivih i elegantnih dokaza Heronove formule srednjoškolca Milesa Edwardsa, objavljenog u *American Mathematics Monthly*. Ono što je posebno zanimljivo je upotreba kompleksnih brojeva, i dokaz koji je baziran na jednom trigonometrijskom identitetu.

U ovom radu se bavimo dokazom Heronove formule u okviru različitih postupaka. Navest ćemo tri dokaza.

**Ključne riječi:** *Heronova formula, površina, trougao, teorem*

## Three Proofs of Heron's formula

**ABSTRACT:** Calculating the surface of any figure is one of the most important problems that we often meet, if the figure is possible to divide in several triangles, than the figure's surface is the sum of the surfaces of those triangles. In that case, we use Heron's formula for the surface.

This paper contains one of interesting and elegant proof of the Heron's Formula obtained by high school student Miles Edwards, published in *American Mathematics Monthly*. The proof is interesting for its usage of complex numbers. And the proof which is based on a trigonometry identity.

This work mainly considers evidence of Heron's formula using different approaches. The three evidences will be presented.

**Keywords:** *Heron's formula, surface, triangle, theorem*

### UVOD

Izračunavanje površine neke figure čest je zadatak. Ako je figuru moguće rastaviti na trouglove, tada se površina figure dobija kao zbir površina tih trouglova. Najčešće se površina računa iz poznatih dužina stranica ili se ove prethodno izračunavaju iz poznatih elemenata koji određuju trougao. U tom se slučaju za površinu koristi Heronova formula.

Jedan od najpoznatijih matematičara u razdoblju oko 1. stoljeća p.n.e. bio je Heron iz Aleksandrije. Njegovo glavno djelo *Metrica* sastoji se od tri knjige koje se bave površinama i zapreminama u kojima postoje samo primjeri, bez dokaza.

Osnovna ideja ovog članka jeste prikaz dokaza Heronove formule objavljenog u *American Mathematics Monthly* i dokaz koji se bazira na jednoj trigonometrijskoj jednakosti, ali ćemo prvo pokazati kako se do sada izvodio taj dokaz u srednjoškolskim udžbenicima.

### POVRŠINA RAZNOSTRANIČNOG TROUGLA

Formula za izračunavanje površine raznostraničnog trougla kojem su poznate dužine sve tri stranice:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

gdje je

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

gdje su  $a, b$  i  $c$  dužine stranica.

Formula je objavljena na samom početku Heronove knjige *Metrica*, koja je pronađena 1896. u Konstantinopolu (više o tome u radu Sullivan, 1987). Sama formula pripisuje se i Arhimedu (287-212. p.n.e.), s obzirom da je *Metrica* zbirka matematičkih znanja kojima je raspolagao antički svijet, te je moguće da ju je Heron samo zabilježio. Prema izvoru Kurepa (1986), Heron je živio u prvom stoljeću p.n.e., dok je prema Sullivanu (1987) to bilo u prvom stoljeću n.e.

Formula ekvivalentna Heronovoj, a zapisana u obliku:

$$P = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 c^2 - \left( \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \right)^2}$$

bila je poznata i u drevnoj Kini, a otkrivena je nezavisno od Grka. Nju možemo naći u djelu *Devet knjiga o matematičkoj vještini* (Shushu Jiuzhang), koje je objavio Qin Jiushao 1247. godine.

**Standardni dokaz**

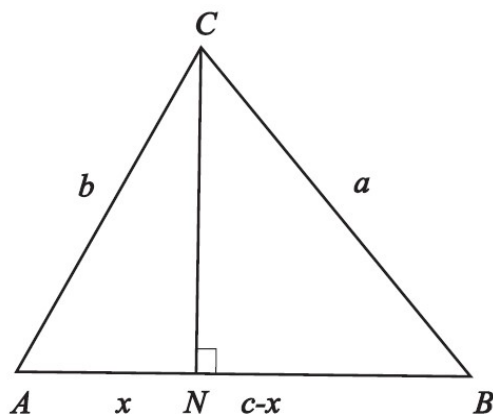
Kao što smo već vidjeli u povšinama raznostranično trougla, Heronova formula se može zapisati u obliku teorema na sljedeći način (Dakić i Elezović, 2001):

**Teorem 1.** *Ako stranice trougla imaju dužine  $a, b$  i  $c$ , tada je površina tog trougla data sa*

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (1)$$

**Dokaz**

Neka je  $C$  vrh trougla, takav da mu je pripadni ugao oštar. Neka je  $N$  podnožje visine iz vrha  $C$ . Tada je  $|CN| = v_c$ . Neka je  $|AN| = x$ , tada je  $|NB| = |AB| - |AN| = c - x$ .



**Slika 1.** Trougao  $\Delta ABC$  s pripadajućom visinom

Kako je trougao  $\Delta ANC$  pravougli, a katete mu imaju dužinu  $x, v_c$  i hipotenuza dužinu  $b$ , po Pitagorinom teoremu vrijedi

$$v_c^2 = b^2 - x^2. \quad (2)$$

Obzirom da je  $\Delta CNB$  pravougli, a katete mu imaju dužinu  $v_c, c - x$  i hipotenuza dužinu  $a$ , po Pitagorinom teoremu vrijedi

$$v_c^2 = a^2 - (c - x)^2. \quad (3)$$

Iz (2) i (3) slijedi

$$\begin{aligned} b^2 - x^2 &= a^2 - (c - x)^2 \\ &= a^2 - c^2 + 2cx - x^2, \\ 2cx &= -a^2 + b^2 + c^2 \\ x &= \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} \end{aligned} \quad (4)$$

Uvrštavanjem (4) u (2) dobije se

$$\begin{aligned} v_c^2 &= b^2 - \left(\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}\right)^2 \\ &= \left(b - \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}\right) \left(b + \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}\right) \\ &= \left(\frac{2bc + a^2 - b^2 - c^2}{2c}\right) \left(\frac{2bc - a^2 + b^2 + c^2}{2c}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{a^2 - (b - c)^2}{2c}\right) \left(\frac{(b + c)^2 - a^2}{2c}\right) \\ &= \left(\frac{(a - b + c)(a + b - c)}{2c}\right) \left(\frac{(b + c - a)(b + c + a)}{2c}\right) \\ &= \left(\frac{(a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(b + c + a)}{4c^2}\right) \\ &= \frac{2s(2s - 2a)(2s - 2b)(2s - 2c)}{4c^2} \\ &= \frac{4s(s - a)(s - b)(s - c)}{c^2}, \\ \frac{cv_c}{2} &= \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}, \\ P &= \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}, \end{aligned}$$

što je tražena Heronova formula (1).

**Dokaz upotrebom kompleksnih brojeva**

U ovom poglavlju ćemo izložiti dokaz koji se može naći u literaturnom izvoru Edwards (2007).

Neka je  $I$  središte upisane kružnice  $\Delta ABC$  poluprečnika  $r$ .

Neka su dalje  $a = y + z, b = x + z, c = x + y$  dužine stranica na suprot vrhova  $A, B$  i  $C$ . Primijetimo da je polovina obima data sa  $s = x + y + z$ .

Očigledno da je

$$\begin{aligned} 2\alpha + 2\beta + 2\gamma &= 2\pi \\ \alpha + \beta + \gamma &= \pi. \end{aligned}$$

Koristeći poluprečnik upisane kružnice  $r$ , realne brojeve  $x, y, z, u, v$  i  $w$  te uglove  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$ , definišemo kompleksne brojeve

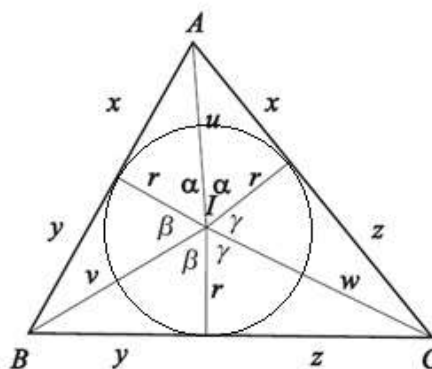
$$(r + ix), (r + iy) \text{ i } (r + iz)$$

takve da je:

$$r + ix = ue^{i\alpha}, \quad r + iy = ve^{i\beta}, \quad r + iz = we^{i\gamma}$$

Sada je

$$\begin{aligned} &(r + ix)(r + iy)(r + iz) \\ &= (ue^{i\alpha})(ve^{i\beta})(we^{i\gamma}) \\ &= uvwe^{i(\alpha+\beta+\gamma)} = uvwe^{i\pi} = -uvw. \end{aligned} \quad (5)$$



**Slika 2.** Trougao  $\Delta ABC$  s pripadajućim poluprečnikom upisane kružnice

S druge strane, lijeva strana (5) jednaka je

$$\begin{aligned} & (r + ix)(r + iy)(r + iz) \\ &= r^3 + ir^2x + ir^2y + ir^2z - rxy \\ & \quad - rxz - ryz - ixyz. \end{aligned}$$

Izjednačavajući realni i imaginarni dio dobijemo:

$$0 = \text{Im}[(r + ix)(r + iy)(r + iz)] = r^2(x + y + z) - xyz$$

Sada je

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{xyz}{x + y + z}} \\ &= \sqrt{\frac{(s - (y + z))(s - (x + z))(s - (x + y))}{s}}. \end{aligned}$$

Kako je  $a = y + z$ ,  $b = x + z$ ,  $c = x + y$

$$s = x + y + z,$$

to je

$$r = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{s}}.$$

Kako je površina  $\Delta ABC$  jednaka zbiru površina torugla  $\Delta AIB$ ,  $\Delta BIC$  i  $\Delta CIA$ , to je vidljivo da možemo pisati

$$\Delta ABC = \Delta AIB \cup \Delta BIC \cup \Delta CIA.$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{1}{2}(a + b + c)r \\ &= (x + y + z)r = sr \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} P &= s \cdot \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{s}} \\ P &= \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} \end{aligned}$$

Ključnu ulogu igra relacija (5) iz koje se vidi da je proizvod kompleksnih brojeva

$$(r + ix)(r + iy)(r + iz)$$

realan broj, pa mu je imaginarna vrijednost jednaka 0. Ova činjenica se koristi za jednostavno izračunavanje poluprečnika trougla upisane kružnice koja se na jednostavan način može izraziti preko polovine obima  $s$ .

### Dokaz upotrebom trigonometrijskog identiteta

Dokaz provodimo u dva koraka. U prvom dokazujemo jednu lemu, a u drugom koraku, na osnovu leme dokazujemo Heronovu formulu.

**Lema.** Ako je  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , onda vrijedi jednakost

$$\begin{aligned} \text{ctg} \frac{\alpha}{2} + \text{ctg} \frac{\beta}{2} + \text{ctg} \frac{\gamma}{2} \\ = \text{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \text{ctg} \frac{\beta}{2} \cdot \text{ctg} \frac{\gamma}{2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Drugim riječima, lema tvrdi da je zbir kotangensa polovine uglova jednak proizvodu kotangensa polovine uglova.

**Dokaz leme.** Neka je  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , slijedi da je

$$\begin{aligned} \gamma &= \pi - (\alpha + \beta), \\ \frac{\gamma}{2} &= \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2}. \end{aligned}$$

To je

$$\text{ctg} \frac{\gamma}{2} = \text{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Pa možemo pisati da je

$$\begin{aligned} \text{ctg} \frac{\alpha}{2} + \text{ctg} \frac{\beta}{2} + \text{ctg} \frac{\gamma}{2} &= \text{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \text{ctg} \frac{\beta}{2} \cdot \text{ctg} \frac{\gamma}{2} \\ &= \text{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \text{ctg} \frac{\beta}{2} \cdot \text{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} \\ &= \frac{1}{\text{tg} \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\text{tg} \frac{\beta}{2}} \\ & \quad + \frac{\text{tg} \frac{\alpha}{2} + \text{tg} \frac{\beta}{2}}{1 - \text{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \text{tg} \frac{\beta}{2}} \end{aligned} \quad (8)$$

Sredimo li desnu stranu u formuli (8) slijedi

$$\begin{aligned} \text{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \text{ctg} \frac{\beta}{2} \cdot \text{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} \\ = \frac{\text{tg} \frac{\alpha}{2} + \text{tg} \frac{\beta}{2}}{\text{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \text{tg} \frac{\beta}{2}} \\ + \frac{\text{tg} \frac{\alpha}{2} + \text{tg} \frac{\beta}{2}}{1 - \text{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \text{tg} \frac{\beta}{2}} \end{aligned} \quad (9)$$

Nakon sabiranja članova na desnoj strani jednakosti (9) dobijemo

$$\begin{aligned} \text{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \text{ctg} \frac{\beta}{2} \cdot \text{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} \\ = \frac{1}{\text{tg} \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{\text{tg} \frac{\beta}{2}} \\ + \frac{\text{tg} \frac{\alpha}{2} + \text{tg} \frac{\beta}{2}}{1 - \text{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \text{tg} \frac{\beta}{2}} \end{aligned} \quad (10)$$

Sada možemo uočiti da nam je desna strana jednakosti (10), drugi zapis formule (7)

$$\text{ctg} \frac{\alpha}{2} + \text{ctg} \frac{\beta}{2} + \text{ctg} \frac{\gamma}{2} = \text{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \text{ctg} \frac{\beta}{2} \cdot \text{ctg} \frac{\gamma}{2}.$$

Na taj način je lema dokazana.

Za dokaz Heronove formule posmatrajmo sliku, gdje je u  $\Delta ABC$  upisana kružnica poluprečnika  $r$ .

Prema slici 2. gdje su stranice  $a, b, c$  označene s  $a = y + z$ ,  $b = x + z$ ,  $c = x + y$ , a  $s = x + y + z$ , možemo primijetiti da vrijedi:

$$x = s - a, \quad y = s - b, \quad z = s - c. \quad (11)$$

Iz slike, također, čitamo da je

$$\text{ctg} \frac{\alpha}{2} + \text{ctg} \frac{\beta}{2} + \text{ctg} \frac{\gamma}{2} = \frac{x}{r} + \frac{y}{r} + \frac{z}{r} = \frac{s}{r}. \quad (12)$$

A s druge strane imamo

$$\text{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \text{ctg} \frac{\beta}{2} \cdot \text{ctg} \frac{\gamma}{2} = \frac{x}{r} \cdot \frac{y}{r} \cdot \frac{z}{r} = \frac{xyz}{r^3}. \quad (13)$$

Iz formula (12) i (13) a na osnovu leme (7) vri

$$\frac{s}{r} = \frac{xyz}{r^3} \quad (14)$$

Množeći obje strane relacije (14) sa  $sr^3$  uvažavajući (6) dobijemo da je

$$P^2 = s^2 r^2 = sxyz. \quad (15)$$

I konačno iz (15) i (10) dobijemo Heronovu formulu (1)

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

## ZAKLJUČAK

Heronova formula je poseban slučaj formule za površinu trapeza koja koristi samo njegove stranice, i može se dobiti iz nje, ukoliko se uzme da je manja osnovica trapeza jednaka nuli.

Stoga, Heronova formula je specijalni slučaj Bramaguptine formule za površinu tetivnog četverougla, a obje formule su specijalni slučaj Bretšnajerove formule za površinu četverougla. U oba slučaja Heronova formula se dobija ukoliko se za jednu stranicu od četverougla pretpostavi da je dužina jednaka nuli.

U Metrici (knjiga I) Heron razmatra problem izračunavanja površine trougla stranica poznatih dužina i nudi dva metoda za rješavanje problema. Zanimljivo je to da je jedan metod baziran na 12. i 13. stavu II knjige Elementata:

- **stav 12:** U svakom tupouglom trouglu kvadrat na strani naspram tupog ugla je veći od zbira kvadrata na stranama koje obrazuju tup ugao za dvostruki pravougaonik obuhvaćen jednom stranom tupog ugla (onom na čije produženje pada spuštена normala) i rastojanjem te normale od tjemena tupog ugla.

- **stav 13:** U svakom oštrogouglom trouglu kvadrat na strani naspram oštrog ugla je manji od zbira kvadrata na stranama koje obrazuju oštar ugao za dvostruki pravougaonik obuhvaćen jednom stranom oštrog ugla (onom na koju je spuštена normala) i rastojanjem te normale od tjemena oštrog ugla.

Postavlja se pitanje kako se Heronova formula izvodi te je li potrebno da učenici znaju taj dokaz, odnosno hoće li se on naći u prijedlogu državne mature. Mišljenja sam da bi završeni srednjoškolci trebali znati barem jedan od dokaza Heronove formule.

## LITERATURA

- Dakić, B. i Elezović, N. (2001). *Matematika 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazije*. Zagreb: Element d.o.o.
- Edwards, M. D. (2007). FA Proof of Heron's Formula. *American Mathematics Monthly*, 114(10): 937.
- Kurepa, S. (1986). *Matematika 1 za prvi razred srednjeg usmjerenog obrazovanja*. Zagreb: Školska knjiga.
- Sullivan M. (1987). *Precalculus*. London: Collier Macmillan Publishers.

## INFORMACIJE O AUTORU

**Anes Z. Hadžiomerović**

Druga gimnazija, Mostar

e-mail: aneshagi@gmail.com