Generalisani skalarni proizvod u nekim banahovim prostorima

Amina Šahović, Sead Peco

SAŽETAK: U ovom radu dokazujemo opravdanost davanja naziva generalisani skalarni proizvod jednoj novoj funkciji, uvedenoj u radu (Vajzović, 2005), u kompleksnom, refleksivnom, striktno konveksnom Banachovom prostoru s Gâteaux-diferencijabilnom normom.

Ključne riječi: *Banahov prostor, Generalisani skalarni proizvod, Gâteaux-diferencijabilna norma*

Generalized Inner Product in Some Banach Spaces

ABSTRACT: In this paper we prove the justification of naming a new function introduced in the paper (Vajzović, 2005) in a complex, reflexive, strictly convex Banach space with a Gateaux-differentiable normas generalized scalar product.

Keywords: *Banach space, generalized inner product, Gateaux-differentiable norm*

UVOD

U radu (Vajzović i Šahović, 2005) je u X, X kompleksan, refleksivan, striktno konveksan Banachov prostor s Gâteaux-diferencijabilnom normom, uvedena funkcija

$$(x,y) := \langle x,y\rangle - i\langle x,y\rangle,\ x,y\epsilon X, \tag{1}$$

pri čemu je funkcija $\langle\cdot,\cdot\rangle: X\times X \to R$ definisana sa

$$\langle x,y\rangle := \|x\| \lim_{t\searrow 0}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}\ ,\ x,y\in X, \tag{2}$$

a kasnije korištena u radovima (Šahović, Vajzović i Peco, 2012) i (Šahović, Vajzović i Peco, 2014).

Uvedeći novu operaciju sabiranja u prostor X, pokazaćemo (teorem 2.1) da je u takvom prostoru, funkcija definisana sa (1.1), generalisani skalarni proizvod u sljedećem smislu:

a) za svaki $x\epsilon X, (x,y)$ je neprekidan linearni funkcional po y i vrijedi

   $|(x,y)| \le \|x\|\|y\|, x,y\epsilon X$ (nejednakost Cauchy-Schwarz-Buniakovskyog),

b) funkcija $(\cdot,\cdot)$ je antilinearna po prvoj varijabli.

Uvedimo neke pojmove i teoreme koje ćemo koristiti u radu.

Tapia je u (Tapia, 1973) pokazao da je svaki normirani linearni prostor X prostor s generalisanim skalarnim proizvodom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ u smislu da je

a) $\|x\|^2 = \langle x,x\rangle,\quad x\in X,$

b) $|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\|y\|,$ (nejednačina Caushy-Schwarz-Buniakovsky)

c) Ako je $[x,y]$ skalarni proizvod u X, tada je $\langle x,y\rangle = [x,y]$ za svaki $x,y\epsilon X$.

Pri tome se smatralo da je X realan prostor. Tvrdnja c) vrijedi u tom slučaju. U slučaju kada je X kompleksan Hilbertov prostor, vrijedi $\langle x,y\rangle = Re[x,y]$.

Iz same defincije funkcije $\langle\cdot,\cdot\rangle$, lako slijede sljedeće osobine:

1) $\langle ax,y\rangle = \langle x,ay\rangle = a\langle x,y\rangle,\quad a\ge 0,$
2) $\langle x,y_1+y_2\rangle \le \langle x,y_1\rangle + \langle x,y_2\rangle,\ \ x,y_1,y_2\in X$
3) $|\langle x,y_1\rangle - \langle x,y_2\rangle| \le \|x\|\|y_1-y_2\|,\ x,y_1,y_2\in X.$

Definicija 1. Ako u normiranom linearnom prostoru X postoji $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}$ za svaki $x,y\in X$, tada za normu u X kažemo da je Gâteaux-diferencijabilna.

Teorem 1. Sljedeće izjave su ekvivalentene

a) Norma u X je Gâteaux-diferencijabilna.
b) $\langle ax,y\rangle = a\langle x,y\rangle,\ a\in\mathbb{R},$
c) $\langle x,ay\rangle = a\langle x,y\rangle,\ a\in\mathbb{R},$
d) $\langle x,y_1+y_2\rangle = \langle x,y_1\rangle + \langle x,y_2\rangle,\ \ x,y_1,y_2\in X$
e) $\langle x,y\rangle = J(x)(y)$, gdje je za $x\in X, J(x) := \{f\in X^*: \|f\| = \|x\|,\ f(x) = \|x\|^2\},$
f) $J(x)$ ima samo jedan elemenat.

Dokaz da je izjava a) ekvivalentna izjavi f) je dao Mazur (1933). Ostalo je dokazao Tapia (1973).

Definicija 2. Za normirani linearni prostor X kažemo da je striktno konveksan, ako

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Rightarrow x = ay$$

Za neki realan $a\ge 0$, i $x,y\in X$.

Teorem 2. Ako je norma u X Gâteaux-diferencijabilna i ako je X striktno konveksan, tada su sljedeće izjave ekvivalentne

a) $|\langle x,y\rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$

b) $x = ay$

za neki realan a i $x,y \in X$.

Dokaz. Tapia (Tapia, 1973).

U Tapia, 1973. je dokazan sljedeći teorem.

Teorem 3. Neka je X realan Banahov prostor.

Tada vrijedi "Riesz representation teorem":

Za svaki $\delta \in X^*$ postoji $x_\delta \in X$ takav da je

$\|x_\delta\| = \|\delta\|$ i $\langle x_\delta, y\rangle = \delta(y)$ za sve $y \in X$

ako i samo ako je X refleksivan s Gâteaux-diferencijabilnom normom. Uz to, x_δ je jedinstven i preslikavanje $\delta \to x_\delta$ je neprekidno iz X^* (pri čemu je X^* snabdjeven norma topologijom) u X (pri čemu je X snabdjeven slabom topologijom) ako i samo ako je X još i striktno konveksan.

GENERALISANI SKALARNI PROIZVOD

Neka je X kompleksan, refleksivan, striktno konveksan Banachov prostor s Gâteaux-diferencijabilnom normom. Uvedimo u X novu operaciju sabiranja „$\hat{+}$" sa

$$x \hat{+} y := \varphi\big(\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y)\big),\ x,y \epsilon X, \qquad (3)$$

pri čemu smo sa φ označili transformaciju koja svakom $\delta \epsilon X^*$ pridružuje $x_\delta \in X$ (vidjeti Teorem 3), X^* dualni prostor prostora X.

Kako je prostor X snabdjeven ovom novom operacijom sabiranja „$\hat{+}$", izometrički izomorfan prostoru X^*, to prostor $(X,\hat{+})$ možemo poistovjetiti s prostorom X^* i pisati $X^* = (X,\hat{+})$.

Teorem 4. U prostoru $(X,\hat{+})$, X kompleksan, refleksivan, striktno konveksan Banachov prostor s Gâteaux-diferencijabilnom normom, funkcija, definisana sa (1), je generalisani skalarni proizvod u sljedećem smislu:

za svaki $x \epsilon X, (x,y)$ je neprekidan linearni funkcional po y i vrijedi:

a) $|(x,y)| \le \|x\|\|y\|, x,y \epsilon X$,

b) funkcija $(\cdot,\cdot)$ je antilinearna po prvoj varijabli.

Dokaz. Dokaz tvrdnje pod a) direktno slijedi iz definicije (1), osobina funkcije $\langle\cdot,\cdot\rangle$, definisane sa (2), navedenih u uvodu, činjenice da je prostor X kompleksan, refleksivan, striktno konveksan Banachov prostor s Gâteaux-diferencijabilnom normom i Teorema 3.

Dokažimo tvrdnju pod b).

Stavimo

$$\langle x,y\rangle^{\wedge} := \|x\| \lim_{t\searrow 0} \frac{\|x\hat{+}ty\| - \|x\|}{t},\ x,y \in X, \qquad (4).$$

Vrijedi

$$\langle x,y\rangle^{\wedge} = \langle y,x\rangle \text{ za sve } x,y \in X, \qquad (5).$$

Zaista prema (4), za $\|x\| = 1$ imamo

$$\langle x,y\rangle^{\wedge} = \|x\| \lim_{t\searrow 0} \frac{\|x\hat{+}ty\| - 1}{t} \ge$$

$$\ge \lim_{t\searrow 0} \frac{1 + t\langle y,x\rangle - 1}{t} = \langle y,x\rangle$$

jer je $x\hat{+}ty = \varphi\big(\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(ty)\big)$ i

$$\|x\hat{+}ty\| = \|\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(ty)\| =$$

$$= \sup_{\|u\|=1} \left|\big(\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(ty)\big)(u)\right| \ge$$

$$\ge \big(\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(ty)\big)(x) = \langle x,x\rangle + \langle ty,x\rangle =$$

$$= \|x\|^2 + t\langle y,x\rangle = 1 + t\langle y,x\rangle \text{ za } \|x\| = 1.$$

Zbog refleksivnosti prostora X i X^*, za svaki $t = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ možemo naći $x_t \in X, \|x_t\| = 1$, tako da je

$$\|x\hat{+}ty\| = \langle x\hat{+}ty, x_t\rangle.$$

Tada za $\|x\| = 1$, imamo

$$\frac{\|x\hat{+}ty\| - \|x\|}{t} = \frac{\langle x\hat{+}ty, x_t\rangle - \|x\|}{t} =$$

$$= \frac{\langle x,x_t\rangle + t\langle y,x_t\rangle - \|x\|}{t}.$$

Zbog $\langle x,x_t\rangle \le \|x\| \cdot \|x_t\| = \|x\|$, iz posljednje jednakosti slijedi

$$\frac{\|x\hat{+}ty\| - \|x\|}{t} \le \frac{t\langle y,x_t\rangle}{t} = \langle y,x_t\rangle.$$

Odavde, zbog toga što je

$$\langle x,y\rangle^{\wedge} = \lim_{t\searrow 0} \frac{\|x\hat{+}ty\| - \|x\|}{t} \le \frac{\|x\hat{+}ty\| - \|x\|}{t}$$

za sve $t = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ jer je $\frac{\|x\hat{+}ty\| - \|x\|}{t}$ neopadajuća funkcija od t, imamo

$\langle x,y\rangle^{\wedge} \le \langle y,x_t\rangle$ za sve sve $t = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$.

Niz $\{x_t\}$, $t = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ je ograničen niz u refleksivnom prostoru, pa se iz njega može izdvojiti podniz, kojeg ćemo ponovo označiti sa x_t, koji slabo konvergira ka nekom x_0 kada $t \to 0$, što pišemo

$$x_t \xrightarrow{w} x_0 (t \to 0)$$

i za koji vrijedi $\langle x,y\rangle^{\wedge} \le \langle y,x_t\rangle$.

Otuda, puštajući da $t \to 0$ iz pposljednje nejednakosti dobijamo

$$\langle x,y\rangle^{\wedge} \le \langle y,x_0\rangle. \qquad (6)$$

Pri tome je $\|x_0\| \le 1$ (jer je $\|x_t\| = 1$ za sve $t = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ i $x_t \xrightarrow{w} x_0$).

S druge strane, vrijedi

$$\|x\hat{+}ty\| = \langle x\hat{+}ty, x_t\rangle = \langle x,x_t\rangle + t\langle y,x_t\rangle \to \langle x,x_0\rangle$$

kada $t \to 0$ (preko ovog podniza).

Ali, očito vrijedi i

$\|x\hat{+}ty\| \to \|x\|$kada $t \to 0$.

Otuda, imamo

$\|x\| = \langle x,x_0\rangle$.

Odavde, i iz $\|x\| = 1$, $\|x_0\| \le 1$, slijedi

$1 = \|x\| \le \|x\| \cdot \|x_0\| \le 1 \cdot 1 = 1$, odakle je $\|x_0\| = 1$.

Znači, imamo

$\langle x,x_0\rangle = 1 = \|x\| \cdot \|x_0\|$,

odakle, zbog striktne konveksnosti prostora X, slijedi $x = x_0$.

Sada iz (6) dobijamo $\langle x,y\rangle^{\wedge} \le \langle y,x\rangle$ što zajedno sa $\langle x,y\rangle^{\wedge} \ge \langle y,x\rangle$ daje (5).

Iz definicije 1, (5), linearnosti $\langle\cdot,\cdot\rangle$ po drugoj komponenti i zbog toga što je

$\langle ix, iy\rangle = \langle x, y\rangle$ i $\langle y, ix\rangle = \langle -iy, x\rangle$ za sve $x, y \in X$, slijedi da za svaki $\lambda = \alpha + i\beta,\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1}$ vrijedi

$$\begin{aligned}(\lambda x, y)^{\wedge} &= \left((\alpha + i\beta)x, y\right)^{\wedge} = \\ &= \langle(\alpha + i\beta)x, y\rangle^{\wedge} - i\langle(\alpha + i\beta)x, iy\rangle^{\wedge} = \\ &= \langle y, (\alpha + i\beta)x\rangle - i\langle iy, (\alpha + i\beta)x\rangle = \\ &= \alpha\langle y, x\rangle + \beta\langle y, ix\rangle - i\alpha\langle iy, x\rangle - i\beta\langle y, x\rangle = \\ &= (\alpha - i\beta)[\langle y, x\rangle - i\langle iy, x\rangle] = \\ &= (\alpha - i\beta)(x, y)^{\wedge} = \\ &= \bar{\lambda}(x, y)^{\wedge},\end{aligned}$$

gdje smo sa $(\cdot,\cdot)^{\wedge}$ označili $(\cdot,\cdot)$ u odnosu na operaciju „$\hat{+}$".

Primjedba 1. Pokazuje se da kompleksan, refleksivan, striktno konveksan Banachov prostor s Gâteaux-diferencijabilnom normom, snabdjeven skalarnim proizvodom definisanim sa (1), ima neke osobine iste ili slične Hilbertovom prostoru (rad Peco, Šahović i Vajzović, in press).

LITERATURA

Mazur, S. (1933). Über konvexe mengen in linearen normierten raumen. *Studia Mathematica, 4*: 70-84.

Peco, S., Šahović, A. i Vajzović, F. (in press). Kvazi-Hilbertovi prostori. *Zbornik radova Šeste matematičke konferencije Republike Srpske*.

Tapia, R. A. (1973). A Characterization of Inner Product Spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society, 41:* 569-574.

Šahović, A. Vajzović, F. i Peco, S. (2012). Generalized inner product on $L^p(R)$, $1 < p < \infty$ spaces and the Hilbert transform. *Proceedings of the Electronic International Interdisciplinary Conference, EIIC 2012*: 583-586.

Šahović, A., Vajzović, F. i Peco, S. (2014). Continuity conditions for the Hilbert transform on quasi-Hilbert spaces. *Journal of Mathematics, 10*(1): 111-120.

Vajzović, F. I Šahović, A. (2005). Cosine operator functions and Hilbert transforms. *Novi Sad journal of mathematics*, 35(2): 41-55.

INFORMACIJE O AUTORIMA

Amina Šahović
Univerzitet „Džemal Bijedić" u Mostaru,
Građevinski fakultet, Univerzitetski Kampus
88104, Mostar
Bosna i Hercegovina
e-mail: amina.sahovic@unmo.ba

Sead Peco
Univerzitet „Džemal Bijedić" u Mostaru,
Građevinski fakultet, Univerzitetski Kampus
88104, Mostar
Bosna i Hercegovina
e-mail: sead.peco@unmo.ba