EDUCA
ČASOPIS ZA OBRAZOVANJE, NAUKU I KULTURU

Jedna klasa Banachovih prostora i teorem o projekciji

Amina Šahović

SAŽETAK: U ovom radu se bavimo refleksivnim, striktno konveksnim (kompleksnim) Banachovim prostorom X sa Gâteaux-difrencijabilnom normom i sa generalisanim skalarnim proizvodom i dokazujemo da za svaki $x\epsilon X$ i za bilo koji (zatvoren) potprostor L prostora X postoji tačno jedan $x_0\epsilon L$ takav da je $x - x_0$ okomit na L. Ovaj rezultat je generalizacija čuvenog teorema o projekciji u teoriji Hilbertovih prostora.

Ključne riječi: *Banachov prostor, Gâteaux-diferencijabilna norma, generalisani skalarni proizvod, teorem o projekciji*

One Class of Banach Spaces and the Projection Theorem

ABSTRACT: In this paper we consider a reflexive, strictly convex (complex) Banach X with Gâteaux-differentiable norm and generalized inner product, and we prove that for every $x\epsilon X$ and for any closed subspace L of X there exists a unique $x_0\epsilon L$ such that $x - x_0$ is orthogonal to L. This result is the generalization of the famous projection theorem in Hilbert space theory.

Keywords: *Banach space, Gateaux-differentiable norm, generalized inner product, projection theorem*

UVOD

U ovom radu ćemo izložiti jedan rezultat do kojeg smo došli pri istraživanju osobina jedne klase Banachovih prostora. Promatrali smo refleksivni, striktno konveksan Banachov prostor X sa Gâteaux-diferencijabilnom normom. Pokazalo se da ovaj prostor ima neke osobine iste ili slične osobinama Hilbertovih prostora. U ovom radu ćemo pokazati da za svaki $x\epsilon X$ i za bilo koji (zatvoren) potprostor L prostora X postoji tačno jedan $x_0\epsilon L$ takav da je $x - x_0$ okomit na L. Ortogonalnost, o kojoj se ovdje govori, odnosi se na generalisani skalarni proizvod, kojeg smo uveli u radu (Vajzović, 2005) i kasnije koristili u nekim našim radovima (Šahović, 2008), (Šahović, 2012) i (Šahović, 2014). Ovaj rezultat je generalizacija čuvenog teorema o projekciji u teoriji Hilbertovih prostora.

Zbog razumijevanja izloženog u radu, navest ćemo sljedeće pojmove i tvrdnje.

DEFINICIJA 1. Za normu normiranog linearnog prostora X se kaže da je Gâteaux-diferencijabilna ako $\lim_{t\to 0}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}$ postoji za sve $x, y\epsilon X$.

DEFINICIJA 2. Za normiran linearan prostor X se kaže da je striktno konveksan ako

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Rightarrow x = ay$$

za neki realan $a \geq 0$ i $x, y\epsilon X$.

U radu [Tapia. 1973], u slučaju realnog Banachovog prostora X, generalisani skalarni proizvod je uveden funkcijom

$$\langle x, y\rangle = \|x\| \cdot \lim_{t\searrow 0}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t},\ x, y \in X \tag{1}$$

i dokazano je da vrijedi:

a) $\langle ax, y\rangle = \langle x, ay\rangle = a\langle x, y\rangle,\quad a \geq 0,$

b) $\langle x, y_1 + y_2\rangle \leq \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle,\ x, y_1, y_2 \in X,$

c) $|\langle x, y_1\rangle - \langle x, y_2\rangle| \leq \|x\|\|y_1 - y_2\|,\ x, y_1, y_2 \in X$

i da vrijede sljedeća tri teorema:

TEOREM 1. Sljedeće izjave su ekvivalentne:

a) norma u X je Gâteaux-diferencijabilna.

b) $\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle,\ a \in \mathbb{R},$

c) $\langle x, ay\rangle = a\langle x, y\rangle,\ a \in \mathbb{R}.$

d) $\langle x, y_1 + y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle,\ x, y_1, y_2 \in X.$

e) $\langle x, y\rangle = J(x)(y)$, gdje je za $x \in X$

$J(x) = \{f \in X^*;\ \|f\| = \|x\|, f(x) = \|x\|^2\}.$

f) $J(x)$ ima samo jedan elemenat.

TEOREM 2. Ako je norma u X Gâteaux-diferencijabilna i ako je X striktno konveksan, tada su sljedeće izjave ekvivalentne:

a) $|\langle x, y\rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$

b) $x = ay$

za neki realan a i $x, y \in X.$

TEOREM 3. Neka je X realan Banachov prostor i X^* njegov dualni prostor. Tada vrijedi „Riesz representation theorem“:

Za svaki $\delta \in X^*$ postoji $x_\delta \in X$ takav da je

$\|x_\delta\| = \|\delta\|$ i $\langle x_\delta, y\rangle = \delta(y)$ za sve $y \in X$

ako i samo ako je X refleksivan sa Gâteaux-diferencijabilnom normom.

Uz to, x_δ je jedinstven i preslikavanje $\delta \to x_\delta$ je neprekidno iz X^* (pri čemu je X^* snabdjeven norma topologijom) u X (pri čemu je X snabdjeven slabom topologijom) ako i samo ako je X još i striktno konveksan.

U radu (Vajzović, 2005), u kompleksan, refleksivan, striktno konveksan Banachov prostor X sa Gâteaux-difrencijabilnom normom uveden je generalisani skalarni proizvod sa

$$(x,y) := \langle x, y\rangle - i\langle x, iy\rangle,\ x, y \in X \qquad (2)$$

Za sve $x \in X$, (x, y) je neprekidan linearan funkcional po y i za sve $x, y \in X$ vrijedi

$$|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|.$$

Više o osobinama funkcije (2) može se vidjeti u radu (Šahović, 2017).

TEOREM O PROJEKCIJI

Neka je X refleksivan, striktno konveksan Banachov prostor sa Gâteaux-difrencijabilnom normom.

Prvo ćemo dokazati teorem o projekciji u slučaju kada je X realan prostor u koji je uveden generalisani skalarni proizvod funkcijom (1).

TEOREM 4. Ako je L bilo koji (zatvoren) potprostor realnog prostora X, tada za svaki $x \in X$ postoji tačno jedan $x_0 \in L$ takav da je $x - x_0$ okomit na L (tj. takav da je $\langle x - x_0, l\rangle = 0 \text{ za sve } l \in L$).

Ovakav vektor x_0 nazivamo ortogonalnom projekcijom vektora x na potprostor L.

Dokaz. Neka je $x \in X$ proizvoljan. Dokažimo prvo da postoji $x_0 \in L$ takav da je

$$\|x - x_0\| = d = d(x, L), \qquad (3)$$

pri čemu je $d(x, L) := \inf_{l\in L}\{\|x - l\|\}$.

Iz definicije $d = d(x, L)$ slijedi postojanje niza $x_n \in L, n = 1,2, \ldots$ takvog da

$$\|x - x_n\| \to d \ (n \to \infty). \qquad (4)$$

Odavde se lako vidi da je niz $x_n$ograničen, a kako je X refleksivan Banachov prostor (pa je svaka kugla slabo kompaktna), to se iz niza x_n može izdvojiti podniz, kojeg ćemo opet označiti sa x_n, koji slabo konvergira ka nekom x_0 kada $n \to \infty$, što pišemo

$$x_n \overset{w}{\to} x_0 \ \ (n \to \infty). \qquad (5)$$

Odavde i iz $x_n \in L, n = 1,2, \ldots$ i pretpostavke da je L (zatvoren) potprostor Banachovog prostora X, pa prema tome i slabo zatvoren skup, slijedi $x_0 \in L$.

Osim toga, (5) implicira da kada $n \to \infty$, tada

$$\langle x - x_0, x - x_n\rangle \to \langle x - x_0, x - x_0\rangle = \|x - x_0\|^2.$$

Iz nejednakosti

$$|\langle x - x_0, x - x_n\rangle| \leq \|x - x_0\|\|x - x_n\|, \qquad (6)$$

zbog (6) i (4), kada pustimo da $n \to \infty$, dobivamo

$$\|x - x_0\| \leq d.$$

Kako $x_0 \in L$, iz posljednje nejednakosti i definicije $d = d(x, L)$ slijedi $\|x - x_0\| = d$.

Jedinstvenost elementa $x_0 \in L$, takvog da vrijedi (3), je očita.

Naime, kada bi postojao još jedan $\overline{x_0} \in L$, $\overline{x_0} \neq x_0$, takav da je $\|x - \overline{x_0}\| = d$, tada bi bilo $x - x_0 \neq x - \overline{x_0}$ i zbog stroge konveksnosti prostora X, vrijedilo bi

$$\left\|\frac{(x-x_0)+(x-\overline{x_0})}{2}\right\| < d,$$

a ovo je nemoguće, zbog definicije $d = d(x, L)$ i jer je $\frac{(x-x_0)+(x-\overline{x_0})}{2} = x - \frac{x_0+\overline{x_0}}{2}$ i $\frac{x_0+\overline{x_0}}{2} \in L$.

Dokažimo sada da je $x - x_0$ ortogonalan na L, tj. dokažimo da vrijedi $\langle x - x_0, l\rangle = 0$ za sve $l \in L$.

Zaista, za $l \in L$ i svaki $\lambda \in R$ vrijedi

$$\langle x - x_0, \lambda l\rangle = \|x - x_0\| \cdot \lim_{t \searrow 0} \frac{\|x-x_0+t\lambda l\| - \|x-x_0\|}{t} \geq 0$$

(jer iz $x_0 \in L$ i $l \in L$ slijedi $x_0 - t\lambda l \in L$, pa je zbog (3) i definicije $d = d(x, L)$, $\|x - (x_0 - t\lambda l)\| \geq \|x - x_0\|$ za sve $t > 0$ i $\lambda \in R$).

Odavde, zbog homogenosti $\langle\cdot,\cdot\rangle$ po drugoj komponenti, dobijamo $\lambda\langle x - x_0, l\rangle \geq 0$ za svaki $\lambda \in R$ i $l \in L$, odakle, nakon dijeljenja sa $\lambda > 0$ i $\lambda < 0$, slijedi $\langle x - x_0, l\rangle = 0$ za sve $l \in L$.■

Iz teorema 4. i definicije funkcije (2) direktno slijedi dokaz teorema o projekciji u slučaju kompleksnog prostora X snabdjevenog generalisanim skalarnim proizvodom definisanim funkcijom (2), tj. vrijedi sljedeći teorem.

TEOREM 5. Ako je L bilo koji (zatvoren) potprostor kompleksnog prostora X, tada za svaki $x \in X$ postoji tačno jedan $x_0 \in L$ takav da je $x - x_0$ okomit na L (tj. takav da je $(x - x_0, l) = 0 \text{ za sve } l \in L$).

LITERATURA

Tapia,R. A., (1973). A characterization of inner product spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 41, 569-574.

Šahović, A., Peco, S., (2017). Generalisani skalarni proizvod u nekim banahovim prostorima, Educa, (ISSN 2303-7342), God. X, br. 10, 51-53.

Šahović, A., Vajzović, F., (2008). A spectrality condition for infinitesimal generator of cosin operator, Matematički Vesnik, (ISSN 0025-5165), Vol. 60, Iss. 233, 193-206.

Šahović, A., Vajzović, F., Peco, S., (2012). Generalized inner product on Lp(R), $\mathbf{1} < p < \infty$ spaces and the Hilbert transform, Proceedings of the Electronic International Interdisciplinary Conference (ISSN:1338-7871, ISBN 978-80-554-0551-3), 583-586.

Šahović, A., Vajzović, F., Peco, S., (2014). Continuity conditions for the Hilbert transform on quasi-hilbert spaces, Sarajevo Journal of Mathematics, (ISSN 1840-0655), Vol. 10(22), No. 1, 111-120.

Vajzović, F., Šahović, A., (2005). Cosine operator functions and Hilbert transforms, NSJOM Vol. 35 No. 2, 41-55.

INFORMACIJE O AUTORU

Amina Šahović

Univerzitet „Džemal Bijedić" u Mostaru

Univerzitetski kampus, 88104 Mostar, Bosna i Hercegovina

e-mail: amina.sahovic@unmo.ba