UDK 336.763.2

BLACK-SCHOLES-ov MODEL VREDNOVANJA OPCIJA

ARMINA HUBANA*

BLACK-SCHOLES OPTIONS PRICING MODEL

Abstract: *The article presents the Black-Scholes formula for predicting future prices of financial derivatives, and is particularly suitable for the evaluation of European options. The paper shows how the Black-Scholes model for valuing European call and put options on a non-dividend-paying stock is derived. Estimating the volatility of stocks is crucial to use the B/Smodel. Volatility can be estimated from historical data or implied from option prices using the model. B&S model is based on the valuation of options in a risk-free portfolio. The key factor models is assembling risk-free portfolio with short position in the option and a long position in the share. On the basis of option is strategy replicating. Replicated portfolio formed from a combination of shares and debt with the risk free rate has the same flow earnings as options. In this case, the option value is equal to the value of a replicated portfolio.*

Key words: *european option, evaluation, Black-Scholes model, geometric Brownian motion, risk-free portfolio, volatility stocks.*

Sažetak: *U radu se predstavlja Black-Scholesova formula za predviđanje kretanja cijena finansijskih derivativa, a posebno je aplikabilna za vrednovanje evropskih opcija. Rad pokazuje kako se izvodi Black-Scholes model za vrednovanje evropske call i put opcije koje ne isplaćuju dividendu. Procjenjivanje volatilnosti dionica presudno je za korištenje B/S modela. Volatilnost može biti procijenjena iz povijesnih podataka ili implicirana iz cijene opcije pomoću modela. B&S model bazira se na vrednovanju opcije u nerizičnom portfoliju. Ključni faktor modela je sastavljanje nerizičnog portfolija koji sadrži kratku poziciju u opciji i dugu poziciju u dionici. U*

* Doc.dr. Armina Hubana, Ekonomski fakultet Univerziteta „Džemal Bijedić“ u Mostaru

osnovi vrednovanja opcija je strategija repliciranja. Replicirani portfolio nastao kombinacijom dionice i zaduživanja uz nerizičnu kamatnu stopu ima iste tokove zarada kao i opcija. U tom slučaju je vrijednost opcije jednakavrijednosti repliciranog portfolija.

Ključne riječi: *evropska opcija, vrednovanje, Black-School-sov model, geometrijsko Brownovo gibanje, nerizični portfolio, volatilnost cijene dionice.*

Uvod

Opcije predstavljaju vrlo specifičan tip finansijskih derivativa koje po svojoj suštini odražavaju određena prava. Plaćanja kod ovakvog tipa aktive zavise od vjerovatnoće dešavanja određenih događaja u budućnosti koji su vezani za kretanje cijena osnovnih instrumenata ili aktive na koju su kreirane. Spadaju u kategoriju „kontigentnih ili uslovnih prava“ (*contigent claims*). Opcioni ugovor (*option contract*) daje pravo, ali ne predstavlja obavezu da se kupi ili proda određena količina tržišnog materijala po unaprijed ugovorenoj cijeni (*strike – exercise price*) do tačno određenog dana u budućnosti (*expiry date*) ili na taj dan. Vrednovanje ovog tipa instrumenata je kompleksnije u odnosu na sve druge oblike derivativa.

Određivanje vrijednosti opcija predstavlja jednu od najizazovnijih i najatraktivnijih oblasti savremene finansijske teorije. Opcije su po svojoj suštini sasvim drugačije u odnosu na druge finansijske instrumente. Zbog toga primjena standardnih metoda diskontovanja budućih gotovinskih tokova nije svojstvena vrednovanju opcija. Osnovni razlog je što opcije spadaju u kategoriju vrijednosnih papira sa kontigentnim pravima, te njihova vrijednost zavisi od vrijednosti i rizika drugih, osnovnih instrumenata koji su joj u podlozi. Na primjer, vrijednost opcija na dionice direktno je uslovljena kretanjem cijena dionica, ali je isplata opcije (*payoff*) nelinearna funkcija cijene dionice. Stoga će cijena opcije, također, biti nelinearna funkcija cijene dionice. Upravo ta nelinearnost otežava vrednovanje i upravljanje rizikom.

Česte i velike promjene, uz postojanje visokog nivoa rizika i neizvjesnosti, nalažu primjenu i posebnih tehnika. Također, postoji i veliki broj različitih modela i teorijskih pristupa ovom problemu. Jedan od važnijih modela koji će se prezentovati u radu je Black-Scholes-ov model vrednovanja opcija.

Black-Scholes-ova formula

Godine 1997. Nobelovu nagradu za metodu određivanja vrijednosti finansijskih derivativa podijelili su profesor Robert C. Merton, sa Univerziteta u Harvardu i profesor Myron S. Scholes, sa Univerziteta u Stanfordu, dok njihov saradnik Fischer Black nije dočekao slavu Nobelove nagrade. Pored njih su se pitanjem vrednovanja opcija bavili brojni autori.[1] F. Black i M. S. Scholes su pokazali da su cijene dionica i cijene opcija (ali i ostalih vrijednosnih papira kasnije nazvanih derivativima) funkcijski povezane, iako se ponašaju stohastički. Njihov rad je rezultirao spektakularnom diferencijalnom jednačinom, čije je rješenje Black-Scholesova formula koja općenito ukazuje kako se mogu predvidjeti buduće cijene finansijskih derivativa. Formula, čiji je dalji razvoj pomogao Robert C. Merton, doživjela je sveopći uspjeh. Nakon nekoliko mjeseci, brokeri i investitori počeli su u svojim analizama koristiti Black-Scholesovu formulu, koja je pogodila srž ekonomske nauke – upravljanje rizikom.[2]

Ako se kod binomnog modela smanjuje trajanje intervala i povećava njihov broj, dolazi se do približavanja Black-Scholes-ovom modelu (B&S). Međutim B&S model nije nastao iz binomnog modela. Kvaliteta modela bila je podvrgnuta različitim testovima.[3] Pokazalo se da još uvijek postoji veliki broj neobjašnjenih razlika između vrijednosti dobivenih iz modela i tržišnih cijena opcija. Dok se binomni model bazira na vrednovanju samostalne (izolovane) opcije, B&S model bazira se na vrednovanju opcije u nerizičnom portfoliju.
Black-Scholes model vrednovanja call opcije rješenje je Black-Scholes-Mertonove diferencijalne jednačine:[4]

---

[1] Hull J. C., Options, Futures and Other Derivatives, 5th Edition, Prentice Hall, New Jersey, 2002; Merton C. Robert, „Theory of Rational Option Pricing“ Bell Journal of Economics and management Science, Vol.4., Spring 1973; Rendleman R.Jr., *„Applied Derivatives – Options, Futures and Swaps“,* Copyright &RichardJ.Rendlman, Malden, 2002; Ikonen S., *„Componentwise Splitting Methods for Pricing American Options under stochastic Volatility“* International Journal of Theoretical and Applied Finance, Blackwell Publishing,10, 2/2007; Rouah F. D., Vainberg G., *„Options Pricing Models & Volatility using Excel – VBA“*, Journal of Derivatives & Hedge Funds, 13/2007; Rubinstein M., „Displaced Diffusion Option Pricing“ Journal of Finance, March 1983., itd.

[2] Ulazni podaci za ovaj model su lako dostupni, kako na finansijskim stranicama dnevnih novina, tako i na internetu.

[3] An Introduction to Options and Futures, str. 123.

[4] Diferencijalna jednačina naziva se Black-Scholes-Mertonova diferencijalna jednačina jer je Robert Merton prepoznao da vrijednost opcije dobivena modelom mora biti bez arbitražnih

$$\frac{\partial f}{\partial t}+k_F P\frac{\partial f}{\partial P}+\frac{1}{2}\delta^2 p^2\frac{\partial^2 f}{\partial P^2}=k_F f \qquad (1.1)$$

Ako se call opcija označi sa C

$$\frac{\partial C}{\partial t}+k_F P\frac{\partial C}{\partial P}+\frac{1}{2}\delta^2 p^2\frac{\partial^2 C}{\partial P^2}=k_F C \qquad (1.2)$$

Odnosno

$$\frac{\partial C}{\partial t}=k_F C-k_F P\frac{\partial C}{\partial P}-\frac{1}{2}\delta^2 p^2\frac{\partial^2 C}{\partial P^2} \qquad (1.3)$$

Black-Scholes-Mertonova diferencijalna jednačina je jednačina koja mora zadovoljiti cijenu bilo kojeg derivativnog instrumenta na dionicu koja ne nosi dividendu. Ključni faktor u Black-Scholes-Mertonovoj analizi je sastavljanje nerizičnog portfolija koji sadrži kratku poziciju u opciji i dugu poziciju u dionici, što se može zapisati kao:

$$\Pi=-C+\frac{\partial C}{\partial P}P \qquad (1.4)$$

Investitor koji drži takav portfolio (1.4) je u kratkoj poziciji sa jednim derivativom i u dugoj poziciji s iznosom $\partial C/\partial P$ dionica. U izostajanju arbitražnih oportuniteta, prinos na portfolio u svakom kratkom periodu mora odgovarati nerizičnoj kamatnoj stopi. Kada se sastavi odgovarajući portfolio sa dionicom i opcijom, zarade i gubici iz pozicije u dionici uvijek izjednačavaju zarade i gubitke iz pozicije u derivativu, pa je ukupna vrijednost portfolija na kraju vremenskog perioda sa sigurnošću poznata. Međutim, pozicija u dionici i opciji je nerizična samo za jako kratke vremenske periode, a da bi portfolio ostao nerizičan mora se stalno korigovati. Pod pretpostavkom da cijena dionice slijedi geometrijsko Brownovo gibanje, te uz ostale navedene argumente, izvedena je parcijalna diferencijalna jednačina (1.1).[5]Jednačina (1.1) ima mnogo rješenja, a vrijednost derivativa koja se

oportuniteta. Bez obzira na doprinos R. Mertona, Black i Scholes (1972, 1973) su objavili jedan rad bez Mertona, a Merton (1973) je sam objavio rad koji ima općenitiji pristup vrednovanju opcija. Scholes, M.S., „Derivatives in a Dynamic Environment“, Nobel Lecture, 9 decembar, 1997., dostupno na www.nobelprize.org/economics/laureates/1997/Scholes-lecture.pdf; Black, F. I Scholes M., „The Pricing of Options and Corporate Liabilities“, Journal of Political Economy, (81) 1973., 637-654. i Merton R.C., „Theory of Rational Option Pricing“, Bell Journal of Economics and Management Science, (4), 1973., 141-183.

[5]Hull J. C., Options, Futures and Other Derivatives, 5th Edition, Prentice Hall, New Jersey,

dobije rješenjem jednačine ovisi o postavljenim graničnim uslovima. U slučaju evropske call opcije ključni granični uslov je:
C = max (P-E,0) kada je t = T

Za jednačinu (1.1) Black i Scholes (1972, 1973) izveli su rješenje, odnosno formulu za vrednovanje evropske call opcije. Formula se uglavnom označava kraticom kao B/S model, a može se zapisati kao:[6]

$$C_0 = P_0 N\left(\frac{\ln(P_0/E)+\left(k_F+\frac{1}{2}\delta^2\right)t}{\delta\sqrt{t}}\right) - Ee^{-k_F t} N\left(\frac{\ln(P_0/E)+\left(k_F-\frac{1}{2}\delta^2\right)t}{\delta\sqrt{t}}\right) \quad (1.5)$$

odnosno,

$$C_0 = P_0 N(d_1) - Ee^{-k_F t} N(d_2) \quad (1.5a)$$

$$d_1 = \frac{\ln(P_0/E)+\left(k_F+\frac{1}{2}\delta^2\right)t}{\delta\sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \delta\sqrt{t}$$

gdje P_0 označava tekuću tržišnu cijenu dionice, E izvršnu cijenu, $Ee^{-k_F t}$ sadašnju vrijednost izvršne cijene, k_F nerizičnu kamatnu stopu za kontinuirano ukamaćivanje, $N(d_1)$ i $N(d_2)$ vjerovatnoće za d_1 i d_2 očitane vrijednosti ispod normalne krive, t vrijeme do isteka važenja opcije, s δ volatilnost cijena dionice, odnosno rizik dionice, mjeren standardnom devijacijom kontinuirano ukamaćenog godišnjeg prinosa na dionice.

Prema (1.5) vrijednost call opcije ovisi o pet inputa: tržišnoj cijeni dionice P_0, izvršnoj cijeni opcije E, vremenu do dospijeća opcije t, nerizičnoj kamatnoj stopi k_F i volatilnosti dionice δ. Izraz N(d) u B/S formuli treba posmatrati kao riziku prilagođenu vjerovatnoću[7] da će call opcija završiti u novcu. Kada su

2002., str. 242-246.

[6] Black F., Scholes M., „The Valuation of Option Contracts and A test of Market Efficiency“, Journal of Finance, (27), 2, str. 401.

[7] N(d) izrazi služe kao riziku prilagođene vjerovatnoće jer d_1 i d_2 rastu kako raste cijena dionice. To znači da su $N(d_1)$ i $N(d_2)$ veći što je viša cijena dionice, a kada je viša cijena dionice u odnosu na izvršnu cijenu, izvršenje opcije je vjerovatnije.

oba N(d) izraza blizu 1, postoji velika vjerovatnoća izvršenja opcije. Tada je vrijednost call opcije jednaka $P_0 - Ee^{-k_F t}$ što predstavlja prilagođenu intrizičnu vrijednost P_0 – PV(E). PV označava sadašnju vrijednost (*present value*). U tom smislu kada je izvršenje opcije, sigurno postoji tražnja na dionicu sa trenutnom vrijednošću P_0 i obaveza sa sadašnjom vrijednošću PV(E), odnosno u slučaju kontinuiranog ukamaćivanja $Ee^{-k_F t}$.[8]

Kada su oba N(d) izraza blizu 0, opcija se sigurno neće iskoristiti, odnosno, B/S formula će potvrditi da je call opcija bezvrijedna. Za srednje vrijednosti N(d), između 0 i 1, prema B/S formuli vrijednost call opcije može se posmatrati kao sadašnja vrijednost mogućih tokova zarada call opcije korigovana za vjerovatnoću izvršenja u novcu. B/S formula vrednovanja call opcije izražena u terminima cijene vezane imovine (dionice) ne uključuje očekivani prinos na dionicu, očekivane dividende, cijenu rizika ili kovarijansu prinosa dionice i tržišta koji su implicitni cijeni dionice.
U modelu (1.5) koristi se nerizična kamatna stopa za kontinuirano ukamaćivanje odnosno, diskontovanje. Obzirom da je češće u upotrebi nekontinuirano diskontovanje može se primijeniti složeni kamatni račun. U tom se slučaju model (1.5a) može zapisati kao:[9]

$$C_0 = P_0 N(d_1) - \frac{E}{(1+k_F)} N(d_2) \qquad (1.5b)$$

Pretpostavke B/S modela

Black-Scholes model vrednovanja opcija polazi od određenih pretpostavki:[10]

1) kratkoročna nerizična kamatna stopa poznata je i konstantna kroz životni vijek opcije

- ova pretpostavka modela predstavlja određene probleme pri utvrđivanju cijene opcije na obveznice i kamatne stope, te se vrše određena prilagođavanja

2) cijena opcije slijedi geometrijsko Brownovo gibanje – proces geometrijske logaritamske normalne (lognormalne) difuzije,

[8] Bodie Z., Kane A., i Marcus A.J., „Investments“, Irwin, Boston, 1989.
[9] Orsag S., „Vrijednosni papiri“, Revicon, Sarajevo, 2003., str. 757-758.
[10] Black F., Scholes M., „The Valuation of Option Contracts and A test of Market Efficiency“, Journal of Finance, (27), 2, str. 400.

(slučajni pomak u kontinuiranom vremenu)
- ova pretpostavka govori da se cijene imovine na koju su izdate opcije kreću kroz vrijeme slijedeći lognormalnu distribuciju vjerovatnoće. Lognormalna distribucija je ona u kojoj logaritamski povrati imaju normalnu distribuciju. Tako, ako dionica naraste sa 100 na 110 dolara, povrat je 10 posto, ali je logaritamski povrat ln(1,10) = 0,0953 ili 9,53 posto. Ako log povrati slijede poznatu normalnu distribuciju (zvonastog oblika), tada povrati imaju lognormalnu distribuciju. Distribucija povrata je pomjerena (skewed) i ide više u desno, dok je u lijevo stisnutija, odražavajući činjenicu da imovina ne može vrijediti manje od nule. Premda je lognormalna distribucija rijetko moguća, ipak se često upotrebljava kao pretpostavka. Tako je distribucija mogućih cijena dionica na kraju nekog konačnog intervala log-normalna, a varijansa prinosa na dionicu je konstantna.

3) ne postoji novčani tok na imovinu na koju je izdata opcija
- ovu pretpostavku je lako promijeniti, prilagođavajući model isplati dividendi dionica na koju su izdate opcije
4) call opcija se može izvršiti samo o dospijeću (evropska opcija)
- ovaj model, osim par složenijih varijacija, ne vrednuje američke opcije. Za vrednovanje američkih opcija upotrebljava se binomni model s velikim brojem vremenskih perioda.

5) ne postoje porezi i transakcioni troškovi pri kupovini ili prodaji dionice ili opcije
- u dosadašnjim primjerima nisu uzeti u obzir porezi ni transakcioni troškovi, koji uvođenjem bitno komplikuju modele, čime se bitno smanjuje vidljivost važnih finansijskih principa uključenih u model.

6) volatilnost imovine je poznata i konstantna
- volatilnost imovine na koju je izdata opcija je standardna devijacija log povrata, te je pretpostavka ovog modela da je ona poznata i konstantna. Međutim, ova pretpostavka je vrlo upitna, iz razloga što volatilnost u stvarnom svijetu nije poznata, te je potrebno procjenjivati. Također, ona nije ni konstantna, pošto su dionička tržišta u jednom periodu više volatilna od drugih perioda.

7) trgovanje vrijednosnim papirima je kontinuirano.
Black i Scholes (1973) izveli su formulu (1.5) za vrednovanje evropske call opcije koristeći analizu u kontinuiranom vremenu pod pretpostavkama

„savršenog tržišta“. Osnovna pretpostavka B/S modela je da cijena dionice (vezane imovine) slijedi geometrijsko Brownovo gibanje. Geometrijsko Brownovo gibanje određuju očekivani, odnosno, zahtjevani prinos i volatilnost cijena dionica. Za vrednovanje opcija korištenjem B/S modela važna je samo volatilnost cijena dionica, jer B/S model ne uključuje očekivani prinos dionice. Volatilnost cijena dionica, δ, koja se koristi u modelu geometrijskog Brownovog gibanja sastavni je dio B/S modela vrednovanja opcija.

Za procjenu volatilnosti, cijene dionica se posmatraju u fiksnim vremenskim intervalima, na primjer, svaki dan, sedmica ili mjesec. Kod izračunavanja procjenjene volatilnosti javljaju se određena važna pitanja. Na primjer, treba li koristiti cijene otvaranja ili zatvaranja, treba li vrijeme mjeriti kalendarskim danima ili danima trgovanja. Fama (1965) i K.R. French (1980) empirijski su testirali volatilnost cijena dionica za dane kada je berza otvorena i kada je zatvorena.[11] Oba su došla do istih rezultata i zaključaka da je volatilnost cijena dionica mnogo veća kada se trguje dionicama, odnosno kada je berza otvorena. Trgovanje dionicama samo po sebi uzrokuje volatilnost cijena dionica, a to su empirijski dokazali K.R. French i Roll (1986).

Izračunavanje, odnosno procjenjivanje volatilnosti dionica presudno je za korištenje B/S modela. Jedna od metoda procjene volatilnosti dionica temelji se na analizi povijesnih podataka, odnosno, analizi cijena dionica iz prethodnih razdoblja.

Procjena volatilnosti dionica iz povijesnih podataka radi se u nekoliko koraka:[12] prvo treba utvrditi vremensko razdoblje Δt (jedan dan, jedna sedmica) i izraziti ga na godišnjem nivou. Ako se koriste dnevne zaključne cijene, tada je Δt jednako jednom danu, koji izražen u godinama iznosi 1/360. Zatim treba prikupiti podatke o cijenama dionica za svako vremensko razdoblje, na primjer, prikupiti dnevne zaključne cijene za 24 sedmice. Te se cijene koriste za izračunavanje n kontinuirano ukamaćenih prinosa od početka do kraja svakog razdoblja. Ako je zaključna cijana dana t označena sa P_t tada je zaključna cijena dana t+1 označena sa P_{t+1}, a dnevni prinos izračunava se prema formuli:

[11] Posebno su testirali volatilnost cijena dionica od ponedjeljka do petka, a posebno od petka nakon zatvaranja berze do otvaranja u ponedjeljak.

[12] Chriss N.A., Black-Scholes and Beyond: Option Pricing Models, McGrow Hill, New York (1997); i Sharpe W.F., Alexander G.J, i Bailey J.V. „Investments“ šesto izdanje, Prentice Hall. (1999).

$$r_t = \log\left(\frac{P_{t+1}}{P_t}\right) \tag{1.6}$$

(1.6) označava dnevni prinos na dionicu koji nije sveden na godišnji nivo. Nakon izračunavanja serije od n dnevnih prinosa, treba izračunati prosječnu vrijednost prinosa uzorka. Prosječan prinos N+1 prinosa izračunava se prema:

$$\bar{r} = \frac{1}{N+1}\left(r_0 + r_1 + ... + r_N\right) \tag{1.7}$$

Izračunati prosječan prinos (2.27) koristi se za izračunavanje standardne devijacije prema:[13]

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}}\sqrt{\frac{1}{N}\left(r_0 - \bar{r}\right)^2 + \left(r_1 - \bar{r}\right)^2 + ... + \left(r_N - \bar{r}\right)^2} \tag{1.8}$$

Ovako procjenjena standardna devijacija prinosa na dionice koristi se u B/S modelu. S obzirom da se radi o procjenjenoj standardnoj devijaciji prinosa uvijek su moguće razlike vrijednosti cijene opcije na tržištu i vrijednosti dobivene B/S modelom zbog greške u procjeni volatilnosti dionice.

Umjesto da procjenjuju standardnu devijaciju prinosa na dionice iz povijesnih podataka, učesnici tržišta često polaze od pretpostavke da je call opcija fer vrednovana na tržištu. To znači da je tekuća tržišna cijena call opcije jednaka fer vrijednosti call opcije. U tom je slučaju vrijednost standardne devijacije δ jedina nepoznata varijabla u B/S formuli. Standardna devijacija rješava se postupkom interacije, odnosno, u formulu se uvrštavaju različite procijenjene vrijednosti standardne devijacije tako dugo dok se uz određenu standardnu devijaciju ne dobije tržišna cijena opcije. Ovakvo rješenje standardne devijacije naziva se imputirana volatilnost (implied valatility).[14] U tom je

[13] U formuli standardne devijacije (1.8) je podijeljeno sa $\sqrt{\Delta t}$ umjesto sa Δt jer se pretpostavlja da je δ trenutna volatilnost, a prema modelu geometrijskog Brownovog gibanja $\delta\sqrt{\Delta t}$ je volatilnost za period Δt. Kod izračunavanja drugog korijena razlika prinosa dijeli se sa N, a ne sa N+1, zato jer se želi dobiti nepristrasna procjena. Detaljnije u Chriss N.A., Black-Scholes and Beyond: Option Pricing Models, McGrow Hill, New York, 1997.

[14] Pored postupka interacije pretpostavljena volatilnost može se procijeniti i metodom

smislu imputirana volatilnost ona uz koju je tržišna cijena call opcije jednaka B/S vrijednosti call opcije. Postupak se može modificirati tako da se primjeni na nekoliko call opcija na istu dionicu. Na primjer, standardna devijacija se može procijeniti za svaku od nekoliko call opcija na istu dionicu koje imaju različite izvršne cijene, ali isto vrijeme isticanja važenja. Tada se standardna devijacija računa kao prosječna veličina i koristi se za određivanje fer vrijednosti druge call opcije koja ima drugu izvršnu cijenu, ali slično vrijeme isticanja važenja. Standardna devijacija prinosa na dionice može se procijeniti i analizom scenarija koja uključuje subjektivnu procjenu vjerovatnoće mogućih budućih cijena dionica.

U osnovi vrednovanja opcija je strategija repliciranja. Replicirani portfolio, odnosno opciji ekvivalentan portfolio kombinacijom dionice i zaduživanja uz nerizičnu kamatnu stopu ima iste tokove zarada kao i opcija. U tom je smislu vrijednost opcije jednaka vrijednosti repliciranog portfolija, pa se vrijednost opcije može zapisati kao:

Vrijednost call opcije = Vrijednost broja dionica u ekvivalentnom portfoliju – Iznos duga

Replicirani portfolio imanentan je Black-Scholes modelu, pa se B/S model može zapisati kao:[15]

Vrijednost opcije = (delta x cijena dionice) – (iznos duga)

$$= \left[N(d_1)\times P\right]-\left[N(d_2)\times(E)e^{-k_F t}\right] \qquad (1.9)$$

U B/S modelu delta call opcije odgovara veličini N(d_1) i može se zapisati:

$$\Delta = \mathrm{N}\,(d_1) \qquad (1.10)$$

Odnosno, iz samog B/S modela d_1 je jednako:

$$d_1 = \frac{\ln(P_0/E)+\left(k_F+\frac{1}{2}\delta^2\right)t}{\delta\sqrt{t}} \qquad (1.11)$$

Uz pretpostavku da je tržišna cijena call opcije jednaka njenoj B/S vrijednosti, delta call opcije je uvijek pozitivna. $Ee^{-k_F t}N(d_2)$ odgovara iznosu novca koji

podjele na dva dijela (Method of Bisections) ili Newton-Raphsonovom metodom.

[15] Sharpe W.F., Alexander G.J., i Bailey J.V., „Investments“, šesto izdanje, Prentice Hall, 1999., str.625-626.

investitor posuđuje, a EN (d_2) nominalnoj vrijednosti duga, odnosno, iznosu koji se mora vratiti do datuma isticanja važenja opcije.

Na primjer, ako je tekuća cijena dionice 42, kamatna stopa 10%, standardna devijacija 20%, a call opcija sa izvršnom cijenom 40 ističe za šest mjeseci, tada vrijednost call opcije prema B/S modelu iznosi:

$$d_1 = \frac{\ln(42/40) + (0{,}10 + 0{,}2^2/2)\times 0{,}5}{0{,}2\sqrt{0{,}5}} = 0{,}7693$$

$$d_2 = \frac{\ln(42/40) + (0{,}1 - 0{,}2^2/2)\times 0{,}5}{0{,}2\sqrt{0{,}5}} = 0{,}6278$$

$$N(d_1) = N(0{,}7693) = 0{,}7791$$
$$N(d_2) = N(0{,}6273) = 0{,}7349$$

$$Ee^{-k_F t} = 40e^{-0{,}10*0{,}5} = 38{,}049$$

Vrijednost call opcije iznosi:

$$C_0 = 42N(0{,}7693) - 38{,}049N(0{,}7349)$$

$$= 32{,}72 - 27{,}96 = 4{,}76 \text{ KM}$$

U navedenom primjeru $N(d_1)$[16] iznosi 0,7791, a $Ee^{-k_F t}N(d_2)$ iznosi 27,96. Na taj način investiciona strategija koja uključuje kupovinu 0,7791 dionica i posuđivanje 27,96 KM u vremenu 0, imat će identične tokove zarada kao i call opcija. S obzirom da se standardni opcijski ugovor sastavlja na dionice u punom lotu, u navedenom primjeru gdje je Δ=0,7791 znači da je potrebno kupiti 77,91 dionica. Ako se navedena opcija trenutno prodaje za 10, prema B/S modelu ona je precijenjena. Ako se ista prodaje za 4, ona je prema B/S modelu podcijenjena. Broj dionica koje investitor mora držati mijenjat će se kroz vrijeme kako se mijenja cijena dionice i kako se približava dan isticanja

[16] Kada se izračunaju d_1 i d_2, $N(d_1)$ i $N(d_2)$ dobiju se korištenjem Excel-ove funkcije NORMADIST. $N(d_1)$ predstavlja kumulativnu vjerovatnoću da će normalno distribuirana varijabla biti manja od d standardnih devijacija iznad očekivane vrijednosti.

važenja opcije. Kroz vrijeme će se mijenjati i iznos duga. U tom je smislu ova investiciona strategija složenija nego što se čini, jer su potrebne kontinuirane modifikacije strategije.

Pošto je kod B&S modela uzeto u obzir više pretpostavki, razvijeni su modeli koji umanjuju njegove nedostatke ili se koriste za vrednovanje različitih nestandardnih tipova opcija. Tako se za ilustraciju mogu spomenuti modeli koji uzimaju u obzir standardnu devijaciju kamatnih stopa i promjene standardne devijacije vezane imovine. Početkom osamdesetih godina prošlog vijeka razvijen je i model za vrednovanje američkog tipa opcija.

B&S model može se upotrijebiti i kod nekih drugih slučajeva kao što je vrednovanje dionica ili kod vrednovanja međunarodnih dugova ukoliko postoje elementi opcije.

Zaključak

Opcije su po svojoj suštini sasvim drugačije u odnosu na druge finansijske instrumente, te je određivanje njihove vrijednosti jako kompleksno. Najvažniji i najčešće primjenjivani modeli za njihovo vrednovanje su binomni model i Black-Scholes-ov model.

Dok se binomni model bazira na vrednovanju samostalne (izolovane) opcije, Black-Scholes-ov model bazira se na vrednovanju opcije u nerizičnom portfoliju. Osnovna pretpostavka B/S modela je da cijena dionice (vezane imovine) slijedi geometrijsko Brownovo gibanje. Geometrijsko Brownovo gibanje određuju očekivani, odnosno, zahtjevani prinos i volatilnost cijena dionica. Za vrednovanje opcija korištenjem B/S modela važna je samo volatilnost cijena dionica, jer B/S model ne uključuje očekivani prinos dionice. Jedna od metoda procjene volatilnosti dionica temelji se na analizi povijesnih podataka, odnosno, analizi cijena dionica iz prethodnih razdoblja. Pošto B&S model podrazumijeva više pretpostavki, razvijeni su modeli koji umanjuju njegove nedostatke ili se koriste za vrednovanje različitih nestandardnih tipova opcija. B&S model može se upotrijebiti i kod nekih drugih slučajeva kao što je vrednovanje dionica ili kod vrednovanja međunarodnih dugova ukoliko postoje elementi opcije.

LITERATURA

Bodie Z., Kane A., i Marcus A.J., „Investments“, Irwin, Boston, 1989.

Boes M. J., Drost F. C., Werker B. J. M., *„The Impact of Overnight Periods of Option“,* Journal of financial and quantitative Analysis, Copyright, 2007.

Chriss N.A., Black-Scholes and Beyond: Option Pricing Models, McGrow Hill, New York, 1997.

Daal E., madan D., *„An Empirical Examination of the Variance – Gamma Model for foreign Currency Options“,* Journal of Business, Copyright, Chicago, 2005.

Dedi L., *„Mogućnosti primjene geometrijskog Brownovog gibanja na vrednovanje opcija“*, Ekonomski pregled, Zagreb, 55(11-12), 2004.

Dragić K., *„Opcije – financijske izvedenice“,* Suvremeno poduzetništvo, TEB Zagreb, 9/2002.

Hull J. C., Options, Futures and Other Derivatives, 5th Edition, Prentice Hall, New Jersey, 2002.

Ikonen S., *„Componentwise Splitting Methods for Pricing American Options under stochastic Volatility“* International Journal of Theoretical and Applied Finance, Blackwell Publishing,10, 2/2007.

Marinković S., „Finansijska opcija: koncept dinamičkog upravljanja rizikom“ Berza 7-9, 1999.

Merton C. Robert, „Theory of Rational Option Pricing“ Bell Journal of Economics and management Science, Vol.4., Spring 1973.

Orsag S., „Vrijednosni papiri“, Revicon, Sarajevo, 2003.

Rendleman R.Jr., *„Applied Derivatives – Options, Futures and Swaps“,* Copyright &RichardJ.Rendlman, Malden, 2002.

Rouah F. D., Vainberg G., *„Options Pricing Models & Volatility using Excel – VBA“*, Journal of Derivatives & Hedge Funds, 13/2007.

Rubinstein M., „Displaced Diffusion Option Pricing“ Journal of Finance, March 1983.

Sharpe W.F., Alexander G.J, i Bailey J.V. „Investments“ šesto izdanje, Prentice Hall, 1999.

www.amazon.com/Modeling-Financial

www.bloomberg.com

www.financial-edu.com

www.nobelprize.org/economics/laureates/1997/Scholes-lecture.pdf

www.nytimes.com

www.world-exchange.org