mr Bajram Čerkez
Nastavnički fakultet Mostar

# O zadacima na prijemnim ispitima iz matematike na tehničkim fakultetima Moskovskog univerziteta (II dio)

UDK 51(079.1)

## Moskovski elektrotehnički i informatički fakultet 2004/2005.

**ZADACI:**
**Varijanta N. 1.**

**Zadatak 1.**

Riješiti nejednačinu: $\frac{x^2-2x-8}{\left|x^2-2x-3\right|} \le 0$

*Rješenje.*

1) $\frac{x^2-2x-8}{\left|x^2-2x-3\right|} \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-8 \le 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ x^2-2x-3 \ne 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$

2) a) Neka je $f(x) = x^2-2x-8=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

b) $x^2-2x-8 \le 0$ za $-2 \le x \le 4$

1) Riješimo (2). Iz $x^2-2x-3 \ne 0$ dobijamo $x \ne 1$ i $x \ne 3$

2) Za sistem(1)-(2) dobijamo skup rješenja iz:

$\left.\begin{cases} x \ne -1, x \ne 3 \\ -2 \le x \le 4 \end{cases}\right\} \Rightarrow (-2 \le x < -1, -1 < x < 3, 3 < x \le 4)$

Skup rješenja je: $x \in [-2,-1) \cup (-1,3) \cup (3,4]$

**Zadatak 2.**

Riješiti jednačinu: $x^3-4x^2-7x+10=0$

*Rješenje*:

1) U postupku rješavanja date jednačine koristićemo dva pristupa.
2) Prvi pristup je transformacija date jednačine u proizvod jedne linearne i jedne kvadratne jednačine, ovako:

$$x^3-4x^2-7x+10=x^3-3x^2-x^2-10x+3x+10=$$
$$=\left(x^3-x^2\right)-\left(3x^2-3x\right)-\left(10x-10\right)=$$
$$=(x-1)\left(x^2-3x-10\right)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x-1=0 \\ x^2-3x-10=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1=1 \\ x_2=-2, x_3=5 \end{matrix}\right.$$

3) a) Drugi pristup ispoljava se u primjeni Bezoutove teoreme tako što odredimo sve cijele djelitelje slobodnog člana u datoj jednačini. Cijeli djelitelji slobodnog člana su: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 10$. Direktnim provjeravanjem u datoj jednačini, zaključijemo da je $x$=1, nula polinoma $P(x)=x^3-4x^2-7x+10$, tj. $P(1)=0$

b) Saglasno Bezoutovoj teoremi, vrijedi:

$$x^3-4x^2-7x+10=(x-1)\cdot g(x),$$

gdje je $g(x)=\left(x^3-4x^2-7x+10\right):(x-1)=x^2-3x-10$

Dakle, vrijedi: $x^3-4x^2-7x+10=(x-1)\cdot\left(x^2-3x-10\right)=0$

Iz posljednje jednačine slijedi: $x_1=1, x_2=-2, x_3=5$ skup rješenja polazne jednačine.

**Zadatak 3.**

Riješiti sistem jednačina: $\left\{\begin{matrix} x^2+y^2-x-y=8 \\ 13xy-6x-6y=48 \end{matrix}\right.$ ..........(*)

*Rješenje*:

1) Pomnožimo prvu jednačinu sistema (*) sa -6.

$$\left\{\begin{matrix} -6x^2-6y^2+6x+6y=-48 \\ 13xy-6x-6y=48 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -6x^2+13xy-6y^2=0 \;....(1)$$

2) Podijelimo jednačinu (1) sa $-x^2 \neq 0$, pri čemu dobijamo;

$$6\left(\frac{y}{x}\right)^2-13\frac{y}{x}+6=0 \;............................(2)$$

3) Riješimo jednačinu (2) po $\left(\frac{y}{x}\right)$.

$$\left(\frac{y}{x}\right)_{1,2}=\frac{13\pm 5}{12} \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} \left(\frac{y}{x}\right)_1=\frac{2}{3} \\ \left(\frac{y}{x}\right)_2=\frac{3}{2} \end{matrix}\right.$$

4) Imamo dvije varijente iz (3) i (*) i

A)

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x \\ x^2 + y^2 - x - y = 8 \end{cases} \Rightarrow x^2 + \left(\frac{2}{3}x\right)^2 - x - \frac{2}{3}x = 8 \Leftrightarrow 13x^2 - 15x + 72 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{3969}}{26} = \frac{15 \pm 63}{26} \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} x_1 = -\frac{24}{13} \\ x_2 = 3 \end{array} \right.$$

a) Ako je $x_1 = -\frac{24}{13}$, tada je $y_1 = -\frac{16}{13}$ tj. $\begin{cases} x_1 = -\frac{24}{13} \\ y_1 = -\frac{13}{13} \end{cases}$

b) Ako je $x_2 = 3$, tada je $y_2 = 2$, tj. $\begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 2 \end{cases}$

B) Za $y = \frac{3}{2}x$ dobijamo:

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x \\ x^2 + y^2 - x - y = 8 \end{cases} \Rightarrow x^2 + \frac{9}{4}x^2 - x - \frac{3}{2}x = 8$$

$$\Leftrightarrow 13x^2 - 10x - 32 = 0$$

Iz jednačine $13x^2 - 10x - 32 = 0$, dobijamo:

$\left[ \begin{array}{l} x_3 = -\frac{16}{13} \\ x_4 = 2 \end{array} \right.$, odakle je $\begin{cases} x_3 = -\frac{16}{13} \\ y_3 = -\frac{24}{13} \end{cases}$ i $\begin{cases} x_4 = 2 \\ y_4 = 3 \end{cases}$

5) Skup rješenja sistema (*) je skup uređenih parova:

$$\left(-\frac{24}{13}, -\frac{16}{13}\right), \left(-\frac{16}{13}, -\frac{24}{13}\right), (2,3), (3,2)$$

**Zadatak 4.**

Koliko rješenja (u zavisnosti od parametra *a*) ima jednačina: $\left|-x^2 + 7x - 6\right| = a$?

*Rješenje*:

1) Razmotrimo u postupku rješavanja grafike funkcija $y = \left|-x^2 + 7x - 6\right|$ i $y = a$

2) Razmotrimo funkciju $y_1 = -x^2 + 7x - 6$

a) Nule (korijeni) f-ije: $-x^2+7x-6=0 \Leftrightarrow x^2-7x+6=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=6 \end{array}\right.$

b) Kordinate vrha parabole su:

1.1 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1+6}{2}=3{,}5$, odakle je $y_0=y_1(x_0)=y_1(3{,}5)=6{,}25$

Zaključak:

Vrh parabole je tačka $T(3{,}5;6{,}25)$

1.2 $x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{7}{2}=3{,}5$, $y_0=-\frac{D}{4a}=\frac{-25}{-4}=6{,}25$ i ovaj pristup dovodi nas do koordinata vrha T date parabole:

1.3 Do koordinata vrha T date parabole možemo doći preko prvog izvoda: f-je $y_1=-x^2+7x-6$ i vrijedi: $y_1^I=7-2x=0 \Rightarrow x_0=\frac{7}{2}$, odakle je: $y_0=y_1(3{,}5)=6{,}25$

Zaključak: F-ja $y_1=-x^2+7x-6$ u tački $x_0=3{,}25$ ima maksimum $y_0=6{,}25$ i njen grafik je na Slici 1.

Vrijednost f-je $y_1=-x^2+7x-6$ za $x$=0 je: $y_1(0)=-6$ Tačka $B(0,-6)$ je simetrična tački $B_1(7,-6)$

S obzirom na pravu $x=\frac{7}{2}$ (osa simetrije parabole, Slika 1)

B) Razmotrimo grafike f-ja $y=\left|7x-x^2-6\right|$ i $y$=$a$ i njihove odnose! Funkcija $y=\left|7x-x^2-6\right|>0$ za:

a) $\forall x \in (-\infty,1)\cup(1,6)\cup(6,+\infty)$, a $y=\left|7x-x^2-6\right|=0$ za $x$ = 1 i $x$ = 6.

b) Grafik funkcije $y$ = $a$ je prava paralelna osi $OX$ i sadrži tačku $M(o,a)$

c) Broj rješenja date jednačine jednak je broju presječnih tačaka grafika funkcija $y$ =$a$ i $y=\left|7x-x^2-6\right|$

d) Ako je $a$<0 presjek grafika je pazan skup (Slika 2)

a) Ako je $a$ = 0 , rješenja su: $x_1=1$ , $x_2=6$ (prava $y$ = 0 je osa $OX$) (Slika 3)

b) Ako je $0 < a < 6{,}25$ , polazna jednačina ima 4 riješenja (Slika 4)

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \qquad C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$$

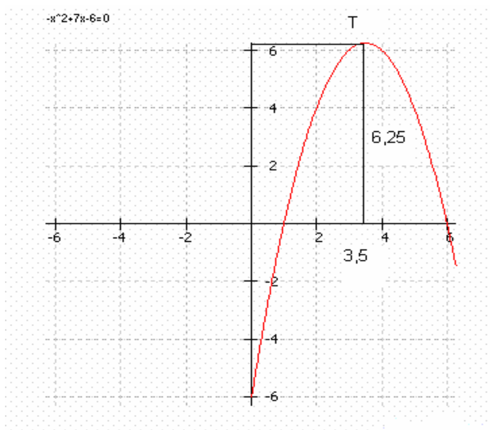
c) Ako je a = 6,25 , polazna jednačina ima 3 riješenja (Slika 5)

$$R(x_1, y_1), T(3{,}5{,}6{,}25) \quad S(x_3, y_3)$$

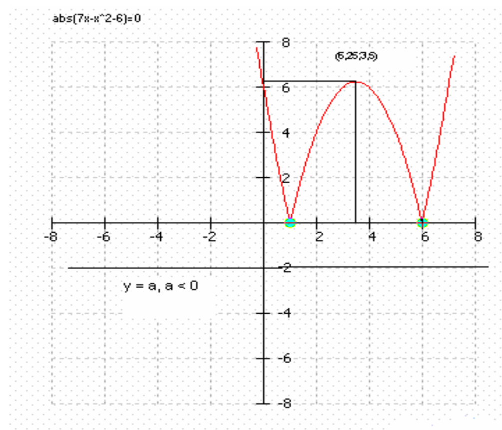
d) Ako je a > 6,25 polazna jednačina ima 2 riješenja (Slika 6)

Zaključak:

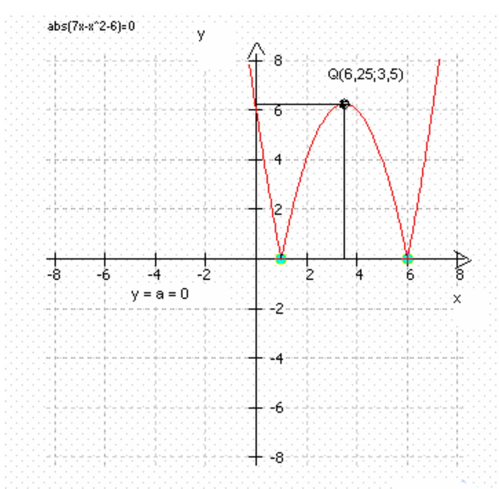
1. Za a < 0 – nema rješenja;
2. Za a = 0 – 2 rješenja;
3. Za 0 < a < 6,25 – 4 rješanja;
4. Za a = 6,25 – 3 rješenja;
5. Za a > 6,25 – 2 rješenja.



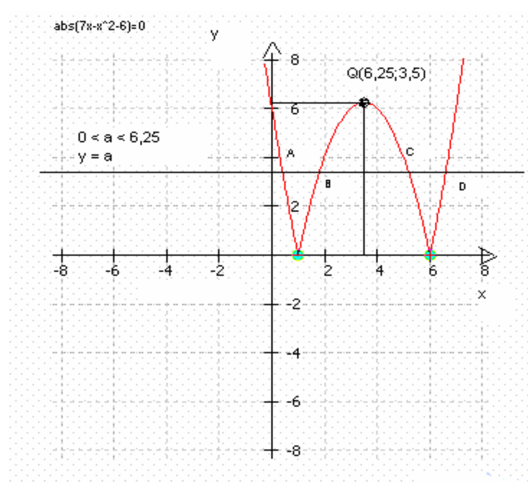

**Slika 1**



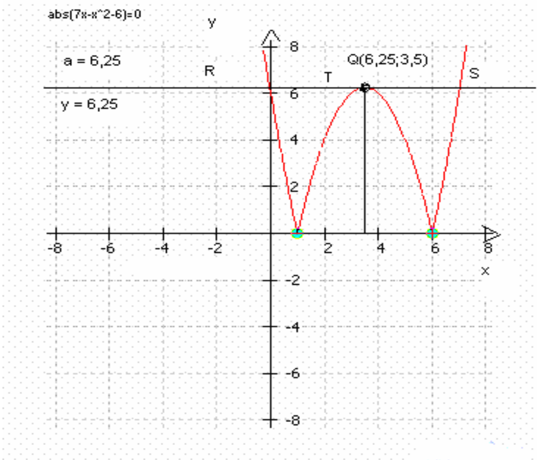

**Slika 2**



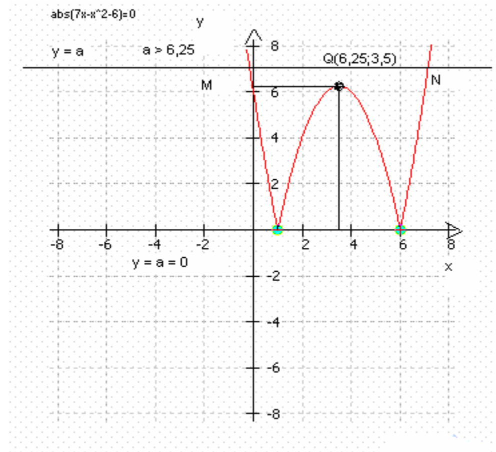

**Slika 3**




**Slika 4**




Slika 5




Slika 6

**Zadatak 5.**

Riješiti jednačinu:

$$\log_{0,3} x - \log_{0,3} x^2 + \log_{0,3} x^4 - \log_{0,3} x^8 + \ldots\ldots - \log_{0,3} x^{512} = 341$$

*Rješenje*:

1) domena jednačine je $\forall x \in (0,+\infty)$, a baza logaritma je: $a = \frac{3}{10}$
2) Koristeći svojstvo logaritma (logaritam stepena), data se jednačina transformiše u oblik:

$$\log_{0,3} x - 2 \cdot \log_{0,3} x + 4 \cdot \log_{0,3} x - 8 \cdot \log_{0,3} x + \ldots - 512 \log_{0,3} x = 341$$

ili u oblik:

$$(1 - 2 + 4 - 8 + \ldots\ldots\ldots - 512) \cdot \log_{0,3} x = 341 \ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

3) Odredimo sumu alternativnog geometrijskog niza 1-2+4-8+.............-512 = $S_{10}$ koji ima 10 članova, tako da vrijedi:
$[(1 + 4 + 16 + 64 + 256) - (2 + 8 + 32 + 128 + 512)] = S_{10}$
4) Iz 3) dobijamo: $S_{10} = 341 - 682 = -341$
5) Unoseći $S_{10} = -341$ u jednačinu (*), dobijamo:

$$-341 \cdot \log_{0,3} x = 341 \Leftrightarrow \log_{0,3} x = -1 \Rightarrow x = (0,3)^{-1} \Rightarrow x = \frac{10}{3} \in (0,+\infty)$$

je rješenje date jednačine.

**Zadatak 6.**

Riješiti nejednačinu: $\sqrt{25^x - 55 \cdot 5^x + 250} < 5^x - 14$

*Rješenje*:

1) Uvedimo zamjenu $5^x = t$, gdje je t > 0. Polazna nejednačina se svodi na oblik:
$\sqrt{t^2 - 55t + 250} < t - 14$ ......................................(1)
2) Razmotrimo 2 mogućnosti:
a)

$$\left\{\begin{array}{l} t^2 - 55t + 250 \geq 0 \\ t - 14 \geq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (t-5)\cdot(t-50) \geq 0 \\ t - 14 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} t - 5 \geq 0 \wedge t - 50 \geq 0 \wedge t - 14 \geq 0 \\ t - 5 \leq 0 \wedge t - 50 \leq 0 \wedge t - 14 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} t \geq 50 \\ \Phi \end{array}\right.$$

b) Odredimo skup rješenja date nejednačine s obzirom na uslove u 2. a)

Tada je :

$$t^2 - 55t + 250 \leq (t-14)^2 \Leftrightarrow t^2 - 55t + 250 \leq t^2 - 28t + 196 \Leftrightarrow -27t \leq -54 \Rightarrow t \geq 2$$

3) Domena nejednačine (1) je $\forall t \in [50, +\infty)$. Skup rješenja polazne nejednačine je (s obzirom na zamjenu $5^x = t \geq 50$) , $x \geq \log_5 50$.

**Zadatak 7.**

Riješiti jednačinu $f^I(x) = 0$ ako je $f(x) = 2 \cdot \sin^4 x - 3\sqrt{3} \cdot \sin x$ u skupu R.

*Rješenje*:

1) Prvi izvod date funkcije $f(x)$ je:
$f^I(x) = 8\sin^3 x \cdot \cos x - 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos x$

2) $f^I(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x \cdot (8\sin^3 x - 3\sqrt{3}) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ (2\sin x)^3 - (\sqrt{3})^3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ (2\sin x - \sqrt{3}) \cdot (4\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x + 3) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \\ x = (-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{3} + n \cdot \pi, n \in Z \end{array}\right.$$

je skup realnih rješenja date jednačine.

Napomena:

Kvadratni trinom $4\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x + 3$ je pozitivan za svako x iz skupa rješenja, jer je:

a = 4>0 i D<0.

**Zadatak 8**.

Odrediti $\arcsin\left(\cos^2\left(2arcctg\left(\sqrt{2}-1\right)\right)\right)$ ..........................(*)

*Rješenje*:

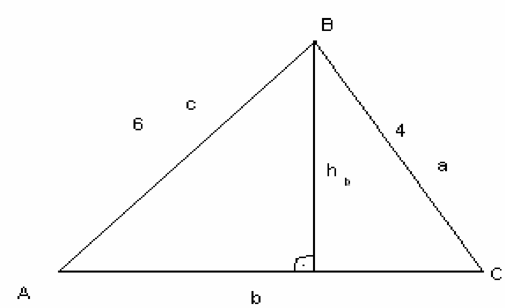
1) Označimo $arcctg\left(\sqrt{2}-1\right)=x \Rightarrow ctgx=\sqrt{2}-1$ ;Iz $ctgx=\sqrt{2}-1$, dobijamo $tgx=\dfrac{1}{ctgx}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}\Rightarrow tgx=\sqrt{2}+1$

2) Iz veze $\cos^2 2x=\left(\dfrac{1-tg^2x}{1+tg^2x}\right)^2$, uvodeći $tgx=\sqrt{2}+1$, nakon izračunavanja, dobijamo: $\cos^2 = \dfrac{1}{2}$

3) Unoseći $\cos^2 = \dfrac{1}{2}$ u izraz (*), dobijamo $\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{6}$

**Zadatak 9.**

U trouglu ABC stranica $\overline{AB}=6$ i $\overline{BC}=4$, a ugao između tih stranica je $60^0$. Odrediti visinu trougla iz vrha B (Slika 7).



**Slika 7**

*Rješenje*:

1) Dato:

$\overline{AB}=6, \overline{BC}=4, \angle ABC=60^0$

Naći $\overline{BD}=h_0 \perp \overline{AC}$

2) $\angle ADB=\angle CDB=90^0$ (iz uslova zadatka)

Površina $\Delta ABC$ je:

$$P_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\sin 60^0=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$$

3) Površina $\Delta ABC$ je također:

$P_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}\cdot h_b$ ili $6\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}\cdot h_b \Rightarrow h_b=\dfrac{12\sqrt{3}}{\overline{AC}}$ ..............(1)

4) Odredimo stranicu $\overline{AC}$ primjenom kosinusne teoreme na $\Delta ABC$. Vrijedi:

$\left(\overline{AC}\right)^2=6^2+4^2-2\cdot 6\cdot 4\cdot\cos 60^0$ ili $\left(\overline{AC}\right)^2=28 \Rightarrow \overline{AC}=2\sqrt{7}$ ....(2)

5) Unoseći $\overline{AC} = 2\sqrt{7}$ u (1), dobijamo:

$$h_b = \frac{12\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{6}{7}\sqrt{21}$$

**Zadatak 10.**

Banka na uloženu sumu novca (A) na početku godine daje kamatni procenat 10%. Za koliko godina složenog interesa će suma A narasti na sumu veću od 2A?

*Rješenje*:

1) Označimo sa x broj godina sume A koja je na štednji u banci, uz godišnji obračun kamata složenog interesa od 10%.
2) Nakon isteka prve godine, suma A se uveća za 0,1 A, tj. ukupna suma je, nakon jedne godine: A+0,1A=1,1A
3) Iz uslova zadatka je $A \cdot 1{,}1^x > 2A \Rightarrow 1{,}1^x > 2$ ..................(1)
4) Uzastopnim provjeravanjem nejednačine (1) za $x \in \{1,2,3..........,8\}$ dobijamo: $1{,}1^7 \approx 1{,}94$ i $1{,}1^8 = 2{,}034 > 2$, odakle je $x \approx 8$ godina.

## Zaključak:

Zadaci prikazani u radu mogu pomoći svršenim srednjoškolcima u pripremi za polaganje prijemnih ispita iz matematike na našim fakultetima koji organizuju te ispite.

1. Analiza svakog od zadataka je, u isto vrijeme, i analiza dotične tematske cjeline koja predstavlja i upućuje na poznavanje bitnih zakonitosti, te i ranijih cjelina i pruža mogućnost transfera tih zakonitosti s drugim tematskim cjelinama.
2. Daje mogućnost kompariranja složenosti zadataka iz iste tematske cjeline i ukazuje na različite pristupe rješenja istog zadatka.
3. Otkriva se razlika u fondu sati iz matematike kod nas i u školama Zajednice država, a to implicira i kompletnu organizaciju prijemnih ispita.
4. Potvrđuje se princip regularnosti u različitosti varijanti i njihovom broju prema realizaciji programskih sadržaja, kao i prema praktičnoj provedbi ispita.
5. Povezanost matematičkih pojmova u zadacima u svakoj varijanti uslovljena je povezanošću nastavnih metoda i

njihovom univerzalnošću primjene (metode transformisanja, dokazne metode, vrste dokaza, izbor metoda pri rješavanju zadataka - supstitucija, analogija, te polazne strategije u izboru ideje za rješenje zadataka, čime se princip variranja potvrđuje kao univerzalni princip).

## Literatura:


1. Zbirka zadataka sa prijemnih ispita na fakultetima Moskovskog univerziteta
2. A. P. Nazaretov, B. L. Pigarev, 2004-2005.
3. J. F. Šarigin, *O zadacima sa prijemnih ispita iz matematike na Moskovskim fakultetima 2001-2002.*
4. Časopis *Zadaci iz matematike sa prijemnih ispita, 2000 – 2001,* Moskva, 2001.